VYSOKOŠKOLSKÉ SKRIPTÁ

Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Komenského

Peter Lukáč

Zbierka príkladov z vákuovej fyziky

Bratislava 2008

Autori:	PETER LUKÁČ
Názov:	Zbierka príkladov z vákuovej fyziky
Lektori:	LIBOR PÁTÝ JOZEF KALUŽAY
Vydavateľ:	Knižničné a edičné centrum FMFI UK
Grafická úprava:	Peter Kohaut
Rok vydania:	2008
Miesto vydania:	Bratislava
Vydanie v elektronickom tvare:	prvé
Počet strán:	77
Internetová adresa:	http://www.fmph.uniba.sk/index.php?id=el_st_m

ISBN 978-80-89186-36-5

Obsah

Úvod

Základ tejto zbierky vznikol z príkladov, ktoré študenti už dlhšiu dobu počítajú na skúške z predmetu „Fyzika nízkych tlakov“ za použitia ľubovoľnej literatúry. Nové učebné plány predpisujú konať k uvedenému predmetu aj výpočtové cvičenie. Preto autor doplnil základ príkladov o ďalšie, takže v súčasnosti sa predkladá študentom viac ako 130 príkladov. Autor sa domnieva, že takáto zbierka je vcelku užitočná a prerátať si zopár príkladov až do konca s číselnými hodnotami je vec veľmi potrebná. Viackrát sa na skúške stalo, že študentom získaný číselný výsledok sa líšil od správneho nielen početne ale i rádovo. Domnievam sa taktiež, že zbierka príkladov je potrebná práve dnes, keď sa kladie zvýšený dôraz na samostatnosť a iniciatívu študentov, čo možno dosiahnuť aj zvyšovaním úrovne cvičení.

Príklady zahrnuté do zbierky sú čiastočne dobre známe, čiastočne zabudnuté a čiastočne celkom nové. Snažil som sa vybrať príklady tak, aby ilustrovali základné myšlienky predmetu v celej šírke a aby vyhovovali celoštátnym sylabom. Uvedomujem si tiež, že by bolo potrebné zaradiť aj ďalšie príklady, čím by však narástol plánovaný rozsah skrípt. Do zbierky sú zaradené len riešené príklady, ktoré však umožnia cvičiacemu učiteľovi ľahko zmeniť číselné hodnoty.

Táto zbierka určite má niekoľko chýb a možno i veľa nedostatkov. K riešeniam, ktoré sa uvádzajú, je teda správne pristupovať kriticky a neveriť im okamžite len preto, že sú „čierne na bielom“. Preto budem veľmi rád, keď ma každý čitateľ upozorní na chybu číselnú, formálnu, vecnú a metodickú, za čo mu vopred ďakujem.

V Bratislave január 1988 *Autor*

Predslov po dvadsiatich rokoch

Predmet „Vákuová fyzika“ sa vyučuje pre 3 experimentálne odbory fyziky a to „fyziku plazmy, fyziku kondenzovaných látok a optiku s optoelektronikou“ v rozsahu dvojhodinovej prednášky týždenne v 1. roku magisterského štúdia. Je to v porovnaní s minulosťou menej. Existujúce učebnice a monografie pre tento predmet v slovenčine, češtine, angličtine a v ďalších svetových jazykoch však neobsahujú praktické príklady na hlbšie osvojenie si získaných znalostí a ich praktického využitia. Vzhľadom na to, je veľmi užitočné vydať skriptá „Zbierka príkladov z vákuovej fyziky“ aj v elektronickej forme. Zbierka obsahuje riešené príklady z rôznych častí vákuovej fyziky a jej základov, čo umožní študentom prehĺbiť si vedomosti, urobiť si reálnu predstavu o jednotlivých javoch a napomôcť pri praktickom návrhu, prípadne zdokonaľovaní vákuovej aparatúry. Zbierka vhodne doplní existujúcu literatúru a napomôže študentom zvýšiť kvalitu osvojených vedomostí.

Autor

ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV

A	– plocha
C	– Vákuová vodivosť, koncentrácia častíc
C_V, c_V	– molekulové teplo za konštantného objemu
D	– koeficient difúzie, priemer potrubia
d, d_m	– priemer molekuly
E_k	– kinetické energia
E_D	– aktivačná energia difúzie
G	– rýchlosť vyparovania (kondenzácia) molekúl vyjadrená v kg/m^{2}s; hmotnosť plynu preprúdeného za jednotku času
B	– magnetická indukcia
I	– elektrický prúd
k	– Boltzmannova konštanta
L, l	– dĺžka
M	– molekulová (molárna) hmotnosť
m	– hmotnosť častice
N	– počet častíc
N_A	– Avogadrovo číslo
n	– koncentrácia častíc
P	– koeficient prenikania plynu
p	– tlak plynu
Q	– množstvo plynu = pV
Q_T	– množstvo tepla
Q_P	– aktivačná energia prenikania plynu
q	– tok (prietok) plynu = Q/t
q_T	– tok tepla
R	– plynová konštanta
r, R_n	– polomer potrubia
S	– plocha, čerpacia rýchlosť
$S_\mathrm{ú}$, S_ef	– účinná (efektívna) čerpacia rýchlosť
T	– absolútna teplota
T_S	– zdvojovacia teplota, Sutherlandova konštanta
V	– objem plynu alebo nádoby
v	– rýchlosť častice
v_arit v_a, $\langle v \rangle$	– stredná aritmetická rýchlosť častíc
v_kv	– kvadratická rýchlosť častíc
v_p	– najpravdepodobnejšia rýchlosť častíc
v_r	– relatívna rýchlosť častíc
v_T	– rýchlosť hmotnostného stredu (ťažiska)
W_des	– aktivačná energia desorpcie = akt. energie adsorpcie
Z	– vákuový odpor
ε	– vyžarovací činiteľ
Φ	– tepelný tok
λ	– stredná voľná dráha častíc
Λ_T	– koeficient tepelnej vodivosti plynu
μ	– molárna hmotnosť
ν	– zrážková frekvencia molekuly, počet zrážok za jednotku času
ν^*	– počet molekúl dopadajúcich za jednotku času na jednotku plochy
η	– koeficient viskozity (vnútorného trenia)
ρ	– hustota plynu = $pM/RT = m \cdot n$
σ	– Štefanova – Boltzmannova konätanta
τ	– doba pobytu molekuly na povrchu

1 ZÁKLADY KINETICKEJ TEÓRIE PLYNOV

1.1. V päťlitrovej nádobe je plyn s tlakom 0,1 MPa. Vypočítajte ako sa zmení tlak plynu, ak nádobu spojíme s ďalšou 10 l alebo 20 l nádobou, v ktorých bol tlak vzduchu menší ako 10^{-4} Pa. Predpokladáme konštantnú teplotu plynu.

Riešenie

Použitím Boyleho-Mariottovho zákona dostaneme, že tlak plynu sa zníži o 66,6 kPa alebo o 80 kPa.

1.2. V jeden a pol litrovej nádobe je dokonale čistý plyn s tlakom 5 kPa. Určite maximálne prípustný tlak zvyškových plynov v nádobách o objeme 0,5 litra a 4 litre, aby sa po ich pripojení zachovala objemová čistota plynu 1 ppm (t. j. 10^{-6} objemového množstva = 10^{-4} %).

Riešenie

Z požiadavky 10^{-6} objemového množstva zvyškových plynov p_2V_2 vyplýva podmienka: $p_2V_2 = 10^{-6}\,p_1V_1$. Po Dosadení príslušných číselných hodnôt dostaneme $p_2 = 1{,}5\cdot 10^{-2}$ Pa a $p_2 = 1{,}875\cdot 10^{-3}$ Pa.

1.3. Plynom plnená nepracujúca priamo žeravená výbojka pri teplote 27 °C obsahuje plyn pod tlakom 80 kPa. Aký bude výsledný tlak plynu v pracujúcej výbojke, ak žeravená katóda vyhreje plyn na strednú teplotu 177 °C?

Riešenie

Použitím Gayovho-Lussacovho zákona dostaneme pre výsledný tlak plynu hodnotu 120 kPa.

1.4. Vypočítajte počet častíc vzduchu v 1 cm^3 pri teplote 273 K a tlakoch 10^2, 10^{-5}, 10^{-9} Pa.

Riešenie

Využijeme vzťah $n_{[cm^{-3}]} = 7{,}244\cdot 10^{16}\,\dfrac{p_{[Pa]}}{T_{[K]}}$. Výpočtom dostaneme hodnoty $2{,}65\cdot 10^{16}$ cm^{-3}, $2{,}65\cdot 10^{9}$ cm^{-3}, a $2{,}65\cdot 10^{5}$ cm^{-3}.

1.5. Vypočítajte počet molekúl v 1 m^3 ľubovoľného plynu pri teplote 27 °C a tlakoch 10^5, 10^2, 10^{-1}, 10^{-4}, 10^{-7}, 10^{-10} a 10^{-13} Pa.

Riešenie

Jednoduchým výpočtom z výrazu pre tlak plynu $p = nkT$ dostaneme postupne koncentrácie $2{,}415\cdot 10^{25}$ m^{-3}; $2{,}415\cdot 10^{22}$ m^{-3}; $2{,}415\cdot 10^{19}$ m^{-3}; $2{,}415\cdot 10^{16}$ m^{-3}; $2{,}415\cdot 10^{13}$ m^{-3}; $2{,}415\cdot 10^{10}$ m^{-3} a $2{,}415\cdot 10^{7}$ m^{-3} = 24,15 cm^{-3}.

1.6. Určite objem 1 kmol plynu pri tlaku 100 kPa a 27 °C.

Riešenie

Použitím stavovej rovnice ideálneho plynu pre 1 kmol dostaneme $V = 24{,}95$ m^3.

1.7. Zmes dusíka a kyslíka sa nachádza v objeme 1,5 litra. Určite parciálne tlaky týchto plynov, ak celkový tlak zmesi je 100 Pa, pričom pri tomto tlaku by dusík zapĺňal objem 1,2 litra a kyslík 0,3 litra.

Riešenie

Použitím Boyle-Mariottovho zákona vypočítame najprv parciálny tlak kyslíka alebo dusíka. Napríklad pre dusík platí 1,2 l $\cdot$ 100 Pa = 1,5 l $\cdot p_{N_2}$, z čoho dostaneme $p_{N_2} = 80$ Pa. Pomocou Daltonovho zákona vypočítame aj parciálny tlak kyslíka $p_{O_2} = 20$ Pa.

1.8. Aký je výsledný tlak zmesi plynov v 2 l nádobe, ak je v nej 10^{15} molekúl kyslíka a 10^{-7} g dusíka? Teplota zmesi je 50 °C.

Riešenie

Podľa Daltonovho zákona platí

$$p = (n_{O_2} + n_{N_2})kT$$

pričom

$$n_{O_2} = \frac{N}{V} = \frac{10^{15}}{2 \cdot 10^{-3}} \text{ m}^3 = 5 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3} \qquad \text{a} \qquad n_{N_2} = \frac{m}{M}\frac{N_A}{V} \text{ m}^3 = 1{,}075\,5 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$$

Po dosadení do prvého vzťahu dostaneme, že $p = 7{,}023 \cdot 10^{-3}$ Pa.

1.9. Určite množstvo vodíka (v jednotkách Pa·l a kg), ktorým je naplnená nádoba s objemom 10 m^3 pod tlakom 0,16 MPa pri teplote 25 °C.

Riešenie

Z definície množstva plynu dostaneme

$$Q = pV = 1{,}6 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot \text{l}$$

Hmotnosť vypočítaného množstva vodíka určíme zo stavovej rovnice ideálneho plynu

$$pV = R\frac{m}{V}T$$

Po dosadení zodpovedajúcich veličín pre hmotnosť vodíka dostaneme

$$m_{H_2} = 1{,}292 \text{ kg}$$

Hmotnosť vzduchu za rovnakých podmienok by bola rovná

$$m_{vzd} = 1{,}292\frac{29}{2} = 18{,}73 \text{ kg}$$

Pre hustotu vodíka dostaneme zo vzťahu

$$\rho = \frac{pM}{RT} = 0{,}129 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

1.10. Vypočítajte hmotnosť vzduchu, vodíka a vodných pár v objeme 1 litra pri tlaku 133,3 Pa a teplote 20 °C.

Riešenie

Zo stavovej rovnice ideálneho plynu dostaneme

$$m = \frac{pV}{RT}M = 4{,}105 \cdot 10^{-7}\, pVM = 5{,}473 \cdot 10^{-8}\, M \text{ [kg]}$$

a teda

$$m_{vzd} = 1{,}587 \cdot 10^{-3} \text{ g}$$

$$m_{H_2} = 1{,}094\,5 \cdot 10^{-7} \text{ g}$$

$$m_{H_2O} = 9{,}85 \cdot 10^{-4} \text{ g}$$

1.11. Vypočítajte hmotnosť dusíka, kyslíka a argónu nachádzajúceho sa v 1 m^3 suchom vzduchu pri atmosférickom tlaku t. j. 101 kPa a 0 °C.

Riešenie

Ak zanedbáme malé prímesi oxidu uhličitého, kryptónu a ďalších inertných plynov, môžeme tvrdiť, že 1 m^3 suchého vzduchu obsahuje 780 l dusíka, 210 l kyslíka a 10 l argónu. Ak zoberieme za molekulové hmotnosti hodnoty postupne 28,016; 32,00 a 39,944, potom zodpovedajúce hmotnosti plynov budú

$$m_{N_2} = \frac{28{,}016}{22{,}4}0{,}780 = 0{,}975 \text{ kg}$$

$$m_{O_2} = \frac{32{,}000}{22{,}4}0{,}210 = 0{,}3 \text{ kg}$$

$$m_{Ar} = \frac{39{,}944}{22{,}4}0{,}10 = 0{,}017\,8 \text{ kg}$$

Celková molekulová hmotnosť vzduchu bude

$$M_{\text{vzd}} = \frac{0{,}975 + 0{,}30 + 0{,}0178}{\dfrac{0{,}975}{28{,}016} + \dfrac{0{,}30}{32{,}00} + \dfrac{0{,}0178}{39{,}944}} = 29\ \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

1.12. Aký objem zaplnia vodné pary z 1 g vody pri tlaku 266 Pa a teplote 20 °C.

Riešenie

Využijeme stavovú rovnicu ideálneho plynu, z ktorej dostaneme

$$V = \frac{mRT}{Mp} = 508\ \text{l} \approx 0{,}5\ \text{m}^3$$

1.13. Určite množstvo vodnej pary pri teplote 20 °C zapĺňa objem 300 cm^3 s tlakom 670 Pa. Na akú hodnotu stúpne tlak vodných pár pri tej istej teplote, ak sa zmenší objem na 100 cm^3, 10 cm^3 a 1 cm^3?

Riešenie

Využijeme Boyleov-Mariottov zákon dovtedy, kým tlak v objeme nedosiahne tlak nasýtených pár vody (2 333 Pa) zodpovedajúci zadanej teplote. Ďalšie zmenšovanie objemu spôsobí kondenzáciu pár. Po číselnom vyjadrení dostaneme hodnoty tlaku postupne 2 010 Pa, 2 333 Pa a 2 333 Pa.

1.14. Tlak nasýtených pár etanolu s molekulovou hmotnosťou M = 46 pri teplote 35 °C sa rovná približne 13,3 kPa. Vypočítajte rýchlosť vyparovania molekúl z jednotkovej plochy za jednotku času.

Riešenie

Rýchlosť vyparovania sa rovná rýchlosti kondenzácie, ktorá sa definuje ako hmotnosť molekúl prechádzajúcich za jednotku času jednotkovou plochou, teda

$$G = m\frac{1}{4}n\langle v\rangle = \frac{p}{4}\sqrt{\frac{8M}{\pi RT}} = 5{,}85 \cdot 10^{-1}\, p\sqrt{\frac{M}{T}} \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}\right]$$

Po číselnom dosadení a za predpokladu, že každá molekula, ktorá dopadne aj skondenzuje a platí rovnováha medzi kondenzujúcimi a vyparujúcimi sa molekulami, dostaneme

$$G = 22{,}54\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

1.15. Vypočítajte tlak ortuťových pár vytvorených úplným odparením kvapky ortuti s hmotnosťou 2 g v uzavretej nádobe s objemom 100 cm^3 vyhriatej na teplotu 557 °C.

Riešenie

Použijeme stavovú rovnicu ideálneho plynu $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$, kde μ je molárna hmotnosť a rovná sa 0,200 6 kg$\cdot$mol^{-1}. Po dosadení číselných hodnôt dostaneme pre tlak ortuťových pár hodnotu 688 kPa.

1.16. Aké množstvo ortuti treba vložiť do evakuovanej uzavretej nádoby s objemom 100 cm^3, aby sa pri jej úplnom vyparení dosiahol tlak v nádobe zodpovedajúci tlaku nasýtených pár ortuti pri teplote 557 °C. Tlak nasýtených pár ortuti pri tejto teplote je 1,333 MPa.

Riešenie

Zo stavovej rovnice ideálneho plynu vyplýva

$$m = \frac{\mu pV}{RT}$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme $m = 3{,}876 \cdot 10^{-3}$ kg.

1.17. V určitom objeme je zmes plynov (kyslíka a dusíka) a pár (vody a ortuti) s nasledujúcimi parciálnymi tlakmi pri teplote 20 °C: $p_{N_2} = 1{,}066 \cdot 10^{-2}$ Pa, $p_{O_2} = 2{,}666 \cdot 10^{-3}$ Pa, $p_{H_2O} = 1{,}333$ Pa, $p_{Hg} =$ $= 1{,}333 \cdot 10^{-1}$ Pa. Určite celkový tlak zmesi, ak bez zmeny teploty zmenšíme objem 10-krát a 10000-krát.

Riešenie

Použijeme Daltonov zákon, Boyleov-Mariottov zákon a skutočnosť, že tlak nasýtených pár vody pri 20 °C je 2 333 Pa a tlak nasýtených pár ortuti je $1{,}6 \cdot 10^{-1}$ Pa. Po číselnom vyjadrení dostaneme v prvom prípade pre výsledný tlak hodnotu 13,623 Pa a v druhom prípade hodnotu 2 466,42 Pa.

1.18. Určite vnútornú kinetickú energiu plynu nachádzajúceho sa v uzavretej nádobe s objemom 200 cm^3, ak tlak plynu je 0,1 MPa.

Riešenie

Využijeme stavovú rovnicu ideálneho plynu s uvážením, že častice majú tri stupne voľnosti. Dostaneme $E_K = 30$ J.

1.19. Odvoďte strednú aritmetickú rýchlosť súboru častíc, ak preň platí Maxwellovské rozdelenie podľa rýchlosti.

Riešenie

Maxwellovskú rozdeľovaciu funkciu vyjadríme v tvare

$$\psi(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}\, v_p^3} \exp\left\{-\frac{v^2}{v_p^2}\right\} v^2$$

Strednú hodnotu aritmetickej rýchlosti vypočítame podľa definície

$$\langle v_{\mathrm{arit}} \rangle = \int_0^\infty \psi(v) v \,\mathrm{d}\, v = \frac{4}{\sqrt{\pi}\, v_p^3} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{v^2}{v_p^2}\right\} v^3 \,\mathrm{d}\, v = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_p$$

pričom sme využili na výpočet integrálu vzťahy

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} x^3 \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2a^2} \qquad \text{a} \qquad v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Poznámka: V ďalších príkladoch využijeme niektorý z nasledujúcich integrálov:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,; \qquad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} x^2 \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{a^{3/2}}\,; \qquad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} x \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2a}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} \,\mathrm{d}(ax^2) = \frac{1}{2a}\,;$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} x^4 \,\mathrm{d}\, x = \frac{3}{8}\frac{\sqrt{\pi}}{a^{5/2}}\,; \qquad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} x^5 \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{a^3}$$

1.20. Vypočítajte strednú kvadratickú rýchlosť súboru častíc, ak preň platí Maxwellovo rozdelenie častíc podľa rýchlosti.

Riešenie

Podobne ako v predchádzajúcom príklade z definície vyplýva

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty \psi(v) v^2 \,\mathrm{d}\, v = \frac{4}{\sqrt{\pi}\, v_p^3} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{v^2}{v_p^2}\right\} v^4 \,\mathrm{d}\, v = \frac{3}{2} v_p^2 = \frac{3kT}{m}$$

z čoho

$$\langle v_{\mathrm{kv}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

1.21. Vypočítajte stredná aritmetickú rýchlosť atómov ortuti pri teplote −73 °C.

Riešenie

Z Maxwellovského rozdelenia vyplýva, že

$$\langle v_{\mathrm{arit}} \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 145{,}5\sqrt{\frac{T}{M}} = 145{,}5 \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

1.22. Vypočítajte strednú aritmetickú rýchlosť molekúl vzduchu, vodíka a vodných pár pri teplote 20 °C.

Riešenie

Z Maxwellovského rozdelenia molekúl dostaneme

$$\langle v_{\text{arit}}\rangle_{\text{vzd}} = 464\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\langle v_{\text{arit}}\rangle_{H_2} = 1\,750\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\langle v_{\text{arit}}\rangle_{H_2O} = 587\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

1.23. Vypočítajte strednú najpravdepodobnejšiu rýchlosť molekúl vodíka pri teplote −73 °C a 27 °C.

Riešenie

Pre Maxwellovo rozdelenia častíc podľa rýchlosti je najpravdepodobnejšia rýchlosť daná

$$\langle v_p\rangle = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 129\sqrt{\frac{T}{M}} = 1\,290\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Pri teplote 27 °C je $\langle v_p\rangle = 1\,580\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

1.24. Odvoďte strednú relatívnu rýchlosť medzi dvoma molekulami s rovnakou hmotnosťou.

Riešenie

Relatívna rýchlosť je definovaná ako

$$\mathbf{v}_{\text{r}} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

Jej strednú hodnotu cez súbory častíc vypočítame pomocou Maxwellových rozdeľovacích funkcií nasledovne

$$\langle v_{\text{r}}\rangle = \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int f(v_{1x})f(v_{1y})f(v_{1z})\,\text{d}v_{1x}\,\text{d}v_{1y}\,\text{d}v_{1z}\cdot\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int f(v_{2x})f(v_{2y})f(v_{2z})\,v_{\text{r}}\,\text{d}v_{2x}\,\text{d}v_{2y}\,\text{d}v_{2z} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}v_p}\right)^6\int\limits_0^{\infty}\text{d}v_{1x}\cdots\int\limits_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{v_1^2+v_2^2}{v_p^2}\right\}v_{\text{r}}\,\text{d}v_{2z}$$

Po dosadení rýchlosti ťažiska $\mathbf{v}_{\text{T}} = \dfrac{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}{2}$ dostaneme

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{\text{T}} + \frac{1}{2}\mathbf{v}_{\text{r}} \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{\text{T}} - \frac{1}{2}\mathbf{v}_{\text{r}}$$

z čoho

$$v_1^2 + v_2^2 = 2v_{\text{T}}^2 + \frac{1}{2}v_{\text{r}}^2$$

Po dosadení do integrálu pre strednú relatívnu rýchlosť a po transformovaní do sférických súradníc dostaneme

$$\langle v_{\text{r}}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}v_p}\right)^6\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{2v_{\text{T}}^2}{v_p^2}\right\}v_{\text{T}}^2\,\text{d}v_{\text{T}}\sin\vartheta_{\text{T}}\,\text{d}\vartheta_{\text{T}}\,\text{d}\varphi_{\text{T}}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{2v_{\text{r}}^2}{v_p^2}\right\}v_{\text{r}}^3\,\text{d}v_{\text{r}}\sin\vartheta_{\text{r}}\,\text{d}\vartheta_{\text{r}}\,\text{d}\varphi_{\text{r}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}v_p^3}\int\limits_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{2v_{\text{T}}^2}{v_p^2}\right\}v_{\text{T}}^2\,\text{d}v_{\text{T}}\,\frac{4}{\sqrt{\pi}v_p^3}\int\limits_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{2v_{\text{r}}^2}{v_p^2}\right\}v_{\text{r}}^3\,\text{d}v_{\text{r}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{8}{\sqrt{\pi}}v_p = \sqrt{2}\langle v_{\text{arit}}\rangle$$

1.25. Vypočítajte strednú relatívnu rýchlosť medzi molekulami s rôznou hmotnosťou.

Riešenie

Relatívnu rýchlosť a rýchlosť ťažiska (hmotnostneho stredu) definujeme ako

$$\mathbf{v}_{\text{r}} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \qquad \mathbf{v}_{\text{T}} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Pre zložky rýchlosti platí

$$v_{1x} = v_{Tx} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{rx} \qquad v_{2x} = v_{Tx} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{rx}$$

a podobne pre v_{1y}, v_{1z}, v_{2y} a v_{2z}.

Súčet kinetických energií častíc v jednotlivých rýchlostných priestoroch je daný

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_T^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_r^2$$

Pre strednú relatívnu rýchlosť častíc s Maxwellovským rozdelením platí

$$\langle v_r \rangle = \left(\frac{m_1}{2\pi k T} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty}\int\int \exp\left\{ -\frac{m_1 v_1^2}{2kT} \right\} \mathrm{d}v_{1x}\, \mathrm{d}v_{1y}\, \mathrm{d}v_{1z} \cdot \left(\frac{m_2}{2\pi k T} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty}\int\int \exp\left\{ -\frac{m_2 v_2^2}{2kT} \right\} v_r\, \mathrm{d}v_{2x}\, \mathrm{d}v_{2y}\, \mathrm{d}v_{2z}$$

Po transformácii integrálov do sférických súradníc, dosadení premenných rýchlostí ťažiska a relatívnej rýchlosti a vykonaním integrácie cez uhly, dostaneme

$$\langle v_r \rangle = (2\pi k T)^{-3} (m_1 m_2)^{3/2} (4\pi)^2 \int_0^{\infty} \exp\left\{ -\frac{(m_1 + m_2) v_T^2}{2kT} \right\} v_T^2\, \mathrm{d}v_T \cdot \int_0^{\infty} \exp\left\{ -\frac{m_1 m_2 v_r^2}{(m_1 + m_2) 2kT} \right\} v_r^3\, \mathrm{d}v_r =$$

$$= (2\pi k T)^{-3} (m_1 m_2)^{3/2} (4\pi)^2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{kT}{m_1 + m_2} \right)^{3/2} \cdot 2 \left(\frac{kT (m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{8kT}{\pi} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)^{1/2} = \left(\frac{8kT}{\pi m_2} + \frac{8kT}{\pi m_1} \right)^{1/2} = \left(\langle v_1 \rangle^2 + \langle v_2 \rangle^2 \right)^{1/2}$$

1.26. Predpokladajme Maxwellovo rozdelenie molekúl podľa rýchlosti. Vypočítajte, aká časť molekúl v jednotke objemu pri jednotkovom tlaku bude mať hodnotu rýchlosti v intervale 0 až v/v_p. Vypočítajte hodnoty normovanej Maxwellovej rozdeľovacej funkcie pre niektoré hodnoty v/v_p.

Riešenie

Maxwellovu rozdeľovaciu funkciu zapíšeme v tvare

$$\frac{(\mathrm{d}n)_v}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{v}{v_p} \right)^2 \exp\left\{ -\left(\frac{v}{v_p} \right)^2 \right\} \frac{\mathrm{d}v}{v_p}$$

Substitúciou $\dfrac{v}{v_p} = x$, z čoho $\dfrac{\mathrm{d}v}{v_p} = \mathrm{d}x$ dostaneme

$$\frac{(\mathrm{d}n)_x}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x$$

Pre počet molekúl z celkového počtu, ktoré majú rýchlosť v intervale 0 až v/v_p dostaneme

$$\frac{n_0^x}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^x x^2 \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x$$

Hodnoty posledného integrálu sú tabelované, takže sa dá ľahko vypočítať.

Hodnoty normovanej Maxwellovej rozdeľovacej funkcie vypočítame podľa vzťahu

$$\frac{1}{n} \frac{(\mathrm{d}n)_x}{\mathrm{d}x} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 \mathrm{e}^{-x^2}$$

Niektoré vypočítané hodnoty sú uvedené v tabuľke 1.1. Z tabuľky vyplýva, že maximum normovanej rozdeľovacej funkcie bude mať hodnotu 0,83. Ak celkový počet molekúl v jednotke objemu bude napríklad 10 000, potom 8 z nich bude mať rýchlosť v intervale 0 až 0,1 v_p alebo 17 z nich bude mať rýchlosť väčšiu ako 3 v_p.

Tabuľka 1.1 Niektoré vypočítané hodnoty normovanej Maxwellovej rozdeľovacej funkcie

$x = \dfrac{v}{v_p}$	$\dfrac{1}{n}\dfrac{(\mathrm{d}n)_x}{\mathrm{d}x}$	$\dfrac{n_0^x}{n}$
0,1	0,022 5	0,000 8
0,2	0,086 7	0,005 9
0,3	0,185 6	0,019 3
0,4	0,307 7	0,043 8
0,5	0,439 3	0,081 2
0,6	0,566 8	0,131 6
0,8	0,761 3	0,266 3
1,0	0,830 3	0,427 6
1,2	0,769 8	0,589 6
1,5	0,535 1	0,787 8
1,7	0,362 4	0,877 2
2,0	0,165 2	0,954 0
2,5	0,027 2	0,994 1
3,0	0,002 4	0,998 3
4,0	$4{,}1\cdot 10^{-6}$	1,000 0
5,0	$7{,}8\cdot 10^{-10}$	1,000 0
6,0	$1{,}9\cdot 10^{-14}$	1,000 0

Riešený príklad by sme mohli formulovať aj ako výpočet pravdepodobnosti, že rýchlosť ľubovoľne zvolenej molekuly je väčšia ako určitá rýchlosť v'. Toto je ekvivalentné výpočtu časti molekúl v jednotke objemu, ktoré majú rýchlosť väčšiu ako hodnota v' t. j.

$$n(v') = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{v'}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{v}{v_p}\right)^2\right\} \frac{v^2}{v_p^{3/2}}\,\mathrm{d}v$$

Po zavedení už uvedenej substitúcie dostaneme

$$n(x') = \frac{4n}{\sqrt{\pi}} \int_{x'}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Integráciou per partes vypočítame

$$\int_{x'}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x'\mathrm{e}^{-x'^2} + \frac{1}{2}\int_{x'}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Ďalej je

$$\int_{x'}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_{0}^{x'} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}[1-\Phi(x')]$$

kde

$$\Phi(x') = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x'} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

je Gaussov integrál, známy z teórie pravdepodobnosti a je tabelovaný. Po dosadení do pôvodnej rovnice dostaneme

$$\frac{n(v')}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{v'}{v_p}\right)\exp\left\{-\left(\frac{v'}{v_p}\right)^2\right\} + 1 - \Phi\left(\frac{v'}{v_p}\right)$$

Pravdepodobnosti rýchlosti väčšej ako v' sú uvedené pre niektoré hodnoty v tabuľke 1.2.

Tabuľka 1.2 Pravdepodobnosť rýchlosti molekúl väčšej ako v'

$\dfrac{v'}{v_p}$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0
$\dfrac{n(v')}{n}$	1,00	0,994	0,956	0,869	0,734	0,572	0,411	0,271	0,163 3	0,090 6	0,046	0,000 4

Z uvedených čísiel vidieť, že napríklad rýchlosti väčšie ako $2v_p$ má len 4,6 % všetkých molekúl, a že rýchlosti 70,6 % všetkých molekúl sú v intervale od $0{,}6v_p$ do $1{,}6v_p$. Rozptyl molekulových rýchlostí je teda celkom malý, a preto predpoklad o rovnakej rýchlosti všetkých molekúl dáva často dostatočne správne výsledky.

1.27. Nech určitý objem je zaplnený len vodnými parami. Vypočítajte počet zrážok jednej molekuly vodnej pary (t. j. zrážkovú frekvenciu)

a) pri teplote 25 °C a tlaku 0,1 Pa,

b) pri teplote 20 °C a tlaku 0,133 Pa.

Riešenie

Využijeme zjednodušenú predstavu o pohybe molekúl, kedy pre zrážkovú frekvenciu platí $\nu = n\sqrt{2}\langle v_\mathrm{a}\rangle \pi d_\mathrm{m}^2$. Ak predpokladáme, že priemer molekuly vody je $d_{\mathrm{H_2O}} = 4{,}7\cdot 10^{-10}$ m, potom jednoduchým výpočtom dostaneme v prípade

a) $\nu = 14\,176\ \mathrm{s^{-1}}$ a v prípade

b) $\nu = 19\,060\ \mathrm{s^{-1}}$.

1.28. Vypočítajte počet zrážok jednej molekuly vodnej pary, ak tvorí len malú prímes vo vzduchu

a) pri teplote 25 °C a tlaku 0,1 Pa,

b) pri teplote 20 °C a tlaku 0,133 Pa.

Riešenie

Za zjednodušených predstáv pre počet zrážok malej prímesi v základnom plyne (vzduchu) dostaneme

$$\nu = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(1+\frac{d_{\mathrm{m_1}}}{d_{\mathrm{m_2}}}\right)^2\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)^{1/2}\pi d_{m_2}^2\langle v_{\mathrm{a2}}\rangle\sqrt{2}n_2$$

Za predpokladá, že $d_\mathrm{vzd} = 3{,}37\cdot 10^{-10}$ m po vykonaní výpočtov dostaneme

a) $\nu = 10\,313\ \mathrm{s^{-1}}$,

b) $\nu = 13\,8\,64{,}7\ \mathrm{s^{-1}}$.

1.29. Vypočítajte zrážkovú frekvenciu molekúl oxidu uhličitého pri teplote 50 °C a tlaku 133,3 Pa.

Riešenie

Zo vzťahu pre zrážkovú frekvenciu $\nu = \mathrm{n}\sqrt{2}\,\pi\, d_{\mathrm{CO_2}}^2\langle v_\mathrm{a}\rangle$ dostaneme

$$\nu = 1{,}136\cdot 10^7\ \mathrm{s^{-1}}.$$

1.30. Vypočítajte strednú voľnú dráhu molekuly oxidu uhličitého ($d_{\mathrm{CO_2}} = 4{,}65\cdot 10^{-10}$ m) pri teplote 50 °C a tlaku 133,3 Pa.

Riešenie

Zo zjednodušeného vzťahu pre strednú voľnú dráhu $\lambda = (\sqrt{2}\,\pi\, d_{\mathrm{CO_2}}^2\mathrm{n})^{-1}$ po dosadení dostaneme $\lambda = 3{,}48\cdot 10^{-5}$ m.

1.31. Aká môže byť minimálna koncentrácia molekúl oxidu uhličitého v guľovej nádobe s priemerom $D = 1$ m, aby ich stredná voľná dráha nebola väčšia ako priemer nádoby.

Riešenie

Zo zjednodušeného vzťahu pre strednú voľnú dráhu dostaneme

$$n \geq (\sqrt{2}\,\pi\, d_{CO_2}^2 D)^{-1} = 1{,}041 \cdot 10^{18}\ \mathrm{m^{-3}}$$

1.32. Vypočítajte strednú voľnú dráhu molekúl vzduchu pri tlaku $1{,}333 \cdot 10^{-4}$ Pa a teplote 20 °C v priblížení ideálneho plynu.

Riešenie

Pre strednú voľnú dráhu molekúl plynu v priblížení ideálneho plynu platí taktiež

$$\lambda_{\mathrm{vzd}} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d_{\mathrm{vzd}}^2 p} = 2{,}2 \cdot 10^{-5}\,\frac{T}{p} = 48{,}66\ \mathrm{m}$$

1.33. Vypočítajte zrážkovú frekvenciu molekuly vzduchu pri tlaku 0,133 Pa a teplote 20 °C.

Riešenie

Pre zrážkovú frekvenciu platí taktiež

$$\nu = \frac{\langle v_{\mathrm{a}} \rangle}{\lambda} = \frac{464\ \mathrm{ms^{-1}}}{0{,}048\,6\ \mathrm{m}} = 9\,536\ \mathrm{s^{-1}}$$

1.34. Vypočítajte strednú voľnú dráhu molekúl vzduchu pri tlaku 1 Pa, teplote 273 K a 298 K, v priblížení ideálneho aj reálneho plynu.

Riešenie

V priblížení ideálneho plynu využijeme jednoduchý vzťah pre strednú voľnú dráhu $\lambda = (\sqrt{2}\,\pi\, d_{\mathrm{m}}^2 n)^{-1}$. Za priemer molekuly vzduchu $d_{\mathrm{m}} = d_{\mathrm{vzd}}$ dosadíme „strednú“ hodnotu $3{,}75 \cdot 10^{-10}$ m [2]. Po vyčíslení dostaneme pri teplote 273 K hodnotu

$$\lambda_{273} = 6{,}04 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}$$

Pre výpočet strednej voľnej dráhy molekúl ideálneho plynu pri inej teplote T, a požadovanom tlaku 1 Pa platí

$$\lambda_T = \frac{T}{273}\,\lambda_{273}$$

V našom prípade $\lambda_{298} = 6{,}593 \cdot 10^{-3}$ m. Ak sa však nezmení koncentrácia molekúl plynu, zmení sa so zmenou teploty aj tlak plynu a stredná dráha sa nemení.

Pre molekuly reálneho plynu sa zmení ich zrážkový prierez. Túto zmenu vypočítal Sutherland a vyjadril ju pomocou konštanty T_{S} alebo C nazvanej zdvojovacia teplota, takže pre strednú voľnú dráhu molekúl platí

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d_{\mathrm{m}}^2 \left(1 + \dfrac{T_{\mathrm{S}}}{T}\right)}$$

V prípade vzduchu $T_{\mathrm{S}} = 113$ [2] a pre strednú voľnu dráhu dostaneme $\lambda_{273} = 4{,}272 \cdot 10^{-3}$ m. Pre strednú voľnú dráhu molekuly pri inej teplote a nezmenenom tlaku platí

$$\lambda_T = \lambda_{273}\,\frac{(273 + T_{\mathrm{S}})T^2}{(T + T_{\mathrm{S}})(273)^2}$$

(Uvedený vzťah odvoďte). Po numerickom vyčíslení dostaneme $\lambda_{298} = 4{,}78 \cdot 10^{-3}$ m. Ak sa však nezmení koncentrácia molekúl plynu, zmení sa so zmenou teploty tlak plynu pre strednú voľnú dráhu molekúl platí

$$\lambda_T = \lambda_{273}\,\frac{(273 + T_{\mathrm{S}})T}{(T + T_{\mathrm{S}})\,273}$$

čo v našom prípade dáva $\lambda_{298} = 4{,}38 \cdot 10^{-3}$ m.

1.35. Vypočítajte strednú voľnú dráhu atómov hélia pri teplote kvapalného vzduchu (88 K) a tlaku 0,133 3 Pa.

Riešenie

Budeme postupovať ako v predchádzajúcom príklade. Za priemer atómu hélia dosadíme hodnotu $d_{\mathrm{He}} = 2{,}2\cdot10^{-10}$ m [2]. Stredná voľná dráha pri teplote 273 K je $\lambda_{273} = 0{,}131\,53$ m, a pre nezmenený tlak pri teplote 88 K dostaneme $\lambda_{88} = 4{,}24\cdot10^{-2}$ m.

Ak uvážime opravu na vzájomné pôsobenie molekúl, potom Sutherlandova konštanta $T_{\mathrm{S}} = 80$ [2,15] a po výpočte bude $\lambda_{273} = 10{,}172\cdot10^{-2}$ m. Pre nezmenený tlak a teplotu 88 K dostaneme $\lambda_{88} = 2{,}22\cdot10^{-2}$ m. Ak sa však nezmení koncentrácia molekúl plynu, potom pre strednú voľnú drahú dostaneme $\lambda_{88} =$ $= 6{,}89\cdot10^{-2}$ m.

Ak chceme vypočítať strednú voľnú dráhu elektrónu v héliu pri uvedených podmienkach použijeme vzťah odvodený v nasledujúcim príklade, pri zanedbaní hmotnosti elektrónu a hodnoty jeho priemeru v ideálnom a reálnom priblížení. Potom zodpovedajúce hodnoty sú $\lambda_{\mathrm{el,\,i}} = 74{,}4\cdot10^{-2}$ m a $\lambda_{\mathrm{el,\,r}} = 57{,}54\cdot10^{-2}$ m.

1.36. Odvoďte výraz pre strednú voľnú dráhu častíc v zmesi plynov.

Riešenie

Využijeme definíciu strednej voľnej dráhy ako podiel skutočnej dráhy častíc typu 1 t. j. $n_1 v_{\mathrm{a}1}$, za jednotku času a celkového počtu zrážok v jednotke objemu za jednotku času. Uvažujeme ideálny plyn. Celkový počet zrážok je určený ako súčet zrážok častíc typu 1 medzi sebou a zrážok častíc typu 1 s časticami typu 2. Prvý člen je daný výrazom

$$n_1^2\sqrt{2}\pi d_{\mathrm{m}_1}^2 v_{\mathrm{a}1}$$

a druhý člen je daný výrazom

$$n_1 n_2 (v_{\mathrm{a}1}^2 + v_{\mathrm{a}2}^2)^{1/2}\pi\left(\frac{d_{\mathrm{m}1}}{2} + \frac{d_{\mathrm{m}2}}{2}\right)^2$$

Jednoduchými úpravami dostaneme

$$\lambda_{1,2} = \left\{\sqrt{2}\pi d_{\mathrm{m}1}^2 n_1 + \frac{\pi}{4}(d_{\mathrm{m}1} + d_{\mathrm{m}2})^2 n_2\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{1/2}\right\}^{-1}$$

kde $v_{\mathrm{a}1}$, $v_{\mathrm{a}2}$, $d_{\mathrm{m}1}$, $d_{\mathrm{m}2}$, n_1, n_2, m_1, m_2 sú stredné aritmetické rýchlosti, geometrické priemery, koncentrácie a hmotnosti častíc typu 1 a 2.

1.37. Vypočítajte strednú voľnú dráhu častíc malej prímesi He vo vzduchu pri tlaku 0,133 3 Pa a teplote 0 °C.

Riešenie

Využijeme zjednodušený vzťah pre strednú voľnú dráhu v zmesi plynov, v ktorom sa zanedbajú vzájomné zrážky častíc prímesi. Teda

$$\lambda_1 = \frac{4\sqrt{2}}{\left(1 + \dfrac{d_{\mathrm{m}1}}{d_{\mathrm{m}2}}\right)^2\left(1 + \dfrac{M_1}{M_2}\right)^{1/2}}\lambda_2$$

Z predchádzajúcich vzťahov vypočítame $\lambda_2 = 4{,}527\cdot10^{-2}$ m a dosadíme už uvedené priemery molekúl a ich molekulové hmotnosti $M_1 = 4$ a $M_2 = 29$. Po vykonaní výpočtov dostaneme pre strednú voľnú dráhu prímesi hélia vo vzduchu $\lambda_1 = 9{,}536\cdot10^{-2}$ m. Takto vypočítaná stredná voľná dráha je maximálna. Reálnejšiu hodnotu dostaneme zavedením Sutherlandovej konštanty do λ_2 a priemerov molekúl d_{m_1}, d_{m_2}. Potom $\lambda_2 = 3{,}2\cdot10^{-2}$ m a $\lambda_1 = 8{,}91\cdot10^{-2}$ m.

1.38. Vypočítajte strednú voľnú dráhu elektrónov v héliu pri tlaku 100 Pa a teplote 20 °C.

Riešenie

Elektróny tvoria vo výboji len malú prímes základného plynu. Preto použijeme vzťah pre strednú voľnú dráhu prímesi zo zjednodušujúcimi predpokladmi, že priemer a hmotnosť elektrónu sú omnoho menšie ako priemer a hmotnosť neutrálneho plynu. Potom $\lambda_{el} = 4\sqrt{2}\,\lambda_{plyn}$.
V našom prípade $\lambda_{el} = 1{,}0645\cdot 10^{-3}$ m, alebo po uvážení Sutherlandovej opravy $\lambda_{el} = 8{,}36\cdot 10^{-4}$ m. Za koncentráciu atómov hélia sme brali hodnotu $n_{He} = 2{,}47\cdot 10^{22}$ m^{-3} a za strednú voľnú atómov hélia $\lambda_{plyn} = 1{,}88\cdot 10^{-4}$ m.

1.39. Na aký tlak treba vyčerpať nádobu (recipient), v ktorej chceme pohliníkovať vnútorný povrch, ak kúsok rozprašovaného hliníka je vo vzdialenosti 50 mm od najvzdialenejšieho miesta povrchu nádoby? Zariadenie pracuje pri teplote 25 °C.

Riešenie

Tlak v nádobe môže byť maximálne tak veľký, aby stredná voľná dráha častíc bola rovná vzdialenosti od miesta rozprašovaného hliníka po jeho podložku. Pre strednú voľnú dráhu molekúl vzduchu sme určili v prípade ideálneho priblíženia

$$\lambda_{298} = \frac{6{,}593\cdot 10^{-3}}{p[\mathrm{Pa}]}[\mathrm{m}]$$

alebo pre reálne priblíženie

$$\lambda_{298} = \frac{4{,}78\cdot 10^{-3}}{p[\mathrm{Pa}]}[\mathrm{m}]$$

Musí platiť $\lambda_{298} \geq 5\cdot 10^{-2}$ m, z čoho vyplýva, že

$$p \leq \frac{6{,}593\cdot 10^{-3}}{5\cdot 10^{-2}} = 1{,}314\cdot 10^{-1}\ \mathrm{Pa}$$

respektíve

$$p \leq \frac{4{,}78\cdot 10^{-3}}{5\cdot 10^{-2}} = 0{,}956\cdot 10^{-1}\ \mathrm{Pa}$$

2 PRENOSOVÉ JAVY V PLYNOCH

2.1. Priestor medzi dvoma veľmi dlhými koaxiálnymi valcami s polomermi R_1 a R_2 ($R_2 > R_1$) je vyplnený ideálnym plynom, ktorého koeficient tepelnej vodivosti je Λ_T. Vonkajší valec R_2 sa udržuje na teplote T_2 a vnútorný valec R_1 na teplote T_1, pričom $T_1 > T_2$. Za predpokladu, že stredná voľná dráha molekúl plynu je menšia ako vzdialenosť medzi valcami, a že nie je konvekcia plynu, nájdite

a) tvar rozdelenia teploty v priestore medzi valcami,

b) Gradient teploty $\mathrm{d}T/\mathrm{d}r$ v priestore medzi valcami,

c) tok tepla $q_{T,1}$ pripadajúci na jednotku dĺžky valcov.

Riešenie

Pretože sa udržujú teploty oboch valcov na stálej teplote z vonkajších zdrojov, bude sa udržovať konštantné rozdelenie teploty $T(r)$. Tok tepla nebude závisieť od času, t. j. proces bude mať stacionárny charakter.

Tok tepla za jednotku času, ktorý prechádza cez myslený valec s polomerom r, kde je konštantná hodnota teploty, je

$$q_T = \frac{\mathrm{d}Q_T}{\mathrm{d}t} = \Lambda_T \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} S = \Lambda_T \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} 2\pi r l$$

kde S je plocha valca s polomerom r a l je jeho dĺžka. Nutnou podmienkou existencie tepelnej rovnováhy a stacionárnosti procesu je nezávislosť tepelného toku q_T od polomeru valca r. Ak by tomu tak nebolo, potom by cez valcové plochy rôznych polomerov tiekli rôzne toky tepla, čo by značilo, že časť tepla by sa zhromažďovala v ktoromsi valci a vyvolala zmenu jeho teploty, čím by sa narušila tepelná rovnováha. Teda je nutné, aby q_T = konšt. $\neq f(r)$. Za tohto predpokladu môžeme integrovať uvedenú rovnicu a dostaneme

$$\frac{2\pi\Lambda_T l}{q_T} \int_{T_1}^{T} \mathrm{d}T = \int_{R_1}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

alebo po integrácii

$$\frac{2\pi\Lambda_T l}{q_T}(T - T_1) = \ln \frac{r}{R_1}$$

Začiatočné podmienky majú tvar:

a) pri $r = R_1$ je $T = T_1$,

b) pri $r = R_2$ je $T = T_2$.

Potom z uvedenej rovnice dostaneme pre tok tepla

$$q_T = \frac{2\pi\Lambda_T (T - T_1) l}{\ln (R_2/R_1)}$$

Tok tepla na jednotku dĺžky valcov je

$$q_{T,1} = \frac{2\pi\Lambda_T (T - T_1)}{\ln (R_2/R_1)}$$

Tvar rozdelenia teploty v priestore medzi valcami dostaneme, keď dosadíme za tok tepla získaný výraz do tretej rovnice, čiže

$$T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\ln (r/R_1)}{\ln (R_2/R_1)}$$

To znamená, že uvedená závislosť má logaritmický charakter.

Gradient teploty dostaneme, ak do prvej rovnice dosadíme výraz pre tok tepla, čiže

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}=\frac{T_2-T_1}{\ln\left(R_2/R_1\right)}\frac{1}{r}$$

2.2. Vzdialenosť medzi zohriatym a studeným povrchom je 10 mm a tlak medzi nimi je 10^5 Pa. Ako sa zmení koeficient tepelnej vodivosti vzduchu, ak tlak sa zníži na hodnotu $5\cdot 10^4$ Pa.

Riešenie

Pretože stredná voľná dráha molekúl vzduchu je menšia ako vzdialenosť medzi povrchmi, tak koeficient tepelnej vodivosti nezávisí od tlaku a teda sa nezmení.

2.3. Ako sa zmení koeficient tepelnej vodivosti plynu, ktorý sa nachádza medzi dvoma povrchmi, popísanými v predchádzajúcom príklade, ak tlak plynu sa zvýši z hodnoty $1{,}333\cdot 10^{-2}$ Pa na hodnotu $4{,}2\cdot 10^{-2}$ Pa.

Riešenie

Ak je vzdialenosť medzi dvoma povrchmi porovnateľná alebo menšia ako stredná voľná dráha molekúl (v našom prípade je cca 50 cm), potom koeficient tepelnej vodivosti plynu Λ_T je úmerný tlaku plynu. Teda koľkokrát sa zvýši tlak plynu, toľkokrát sa zmení aj koeficient tepelnej vodivosti plynu, čiže

$$\frac{4{,}2\cdot 10^{-2}}{1{,}333\cdot 10^{-2}}=3{,}15\text{-krát}$$

2.4. Koeficient tepelnej vodivosti dusíka $\Lambda_{T,\mathrm{N_2}}$ pri teplote 0 °C sa rovná $1{,}3\cdot 10^{-2}$ $\mathrm{J\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}\cdot K^{-1}}$. Určite efektívny priemer molekúl dusíka za týchto podmienok.

Riešenie

Koeficient tepelnej vodivosti plynu (ideálneho) v kinetickej teórie plynov je daný ako

$$\Lambda_T=\frac{1}{3}\langle v_\mathrm{a}\rangle\lambda\rho C_V$$

kde λ je stredná voľná dráha molekúl plynu, v ktorej je zašifrovaný prierez molekuly, ρ je hustota plynu a C_V, je molekulové teplo za konštantného objemu. Po dosadení za strednú voľnú dráhu molekúl dostaneme

$$d_\mathrm{ef}^2=\frac{\langle v_\mathrm{a}\rangle\rho C_V}{3\sqrt{2}\Lambda_T n}$$

Po dosadení za hustotu plynu $\rho = m\cdot n$ a za $C_V = 5R/2M = 5k/2m$ dostaneme

$$d_\mathrm{ef}^2=\frac{5}{3}\frac{k}{\Lambda_T}\sqrt{\frac{RT}{\pi^3 M}}=9{,}0486\cdot 10^{-20}\ \mathrm{m}^2$$

alebo

$$d_\mathrm{ef}=3\cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

2.5. Koeficient tepelnej vodivosti vzduchu pri teplote 0 °C a atmosférickom tlaku je rovný $\Lambda_{T,\mathrm{vzd}} =$ $= 2{,}176\cdot 10^{-2}$ $\mathrm{J\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}\cdot K^{-1}}$. Určite hodnotu koeficientu $\Lambda_{T,\mathrm{vzd}}$ pri teplote 40 °C a pri tom istom tlaku.

Riešenie

Koeficient tepelnej vodivosti ideálneho plynu sa určí podľa vzťahu

$$\Lambda_T=\frac{1}{3}\langle v_\mathrm{a}\rangle\lambda\rho C_V$$

Z definície je zrejmé, že nezávisí explicitne od teploty. Táto závislosť je skrytá vo veličinách definujúcich koeficient tepelnej vodivosti plynu, okrem parametra C_V, ktorý závisí od teploty len pre viacatómové plyny a nízkych teplotách. Súčin $\lambda\rho = m/\sqrt{2}\pi d_m^2$ nezávisí od teploty, ak zanedbáme závislosť

d_m od teploty (Sutherlandov vzťah). Potom koeficient tepelnej vodivosti Λ_T závisí od teploty cez strednú aritmetickú rýchlosť, t. j. $\langle v_\mathrm{a}\rangle = A\sqrt{T}$, kde A je konštanta pre zvolený plyn. Pre teploty T_1 a T_2 platí

$$\Lambda_{T,1} = A'\sqrt{T_1} \quad \text{a} \quad \Lambda_{T,2} = A'\sqrt{T_2}$$

z čoho

$$\Lambda_{T,2} = \Lambda_{T,1}\sqrt{T_2/T_1}$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$\Lambda_{T,2} = 2{,}330\,46\cdot 10^{-2}\ \mathrm{J\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}\cdot K^{-1}}$$

2.6. Priestor medzi dvoma veľkými paralelnými doštičkami je vyplnený héliom. Vzdialenosť medzi nimi je L = 50 mm. Jedna doštička sa udržuje pri teplote T_2 = 40 °C a druhá pri teplote T_1 = 20 °C. Vypočítajte tok tepla jednotkovou plochou pre tlak v plyne 10^5 Pa a tlak $6{,}65\cdot 10^{-3}$ Pa.

Riešenie

Tok tepla je v zjednodušenej úvahe daný vzťahom

$$q_T = -\Lambda_T \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -c_V\eta\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

Pre absolútnu hodnotu toku po dosadení zjednodušených vzťahov pre ideálny plyn dostaneme výraz

$$q_T = \frac{iR}{3\pi d_\mathrm{He}^2 L N_\mathrm{A}}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}}(T_2 - T_1)$$

Po dosadení číselných hodnôt a za priemer atómu hélia hodnotu $d_\mathrm{He} = 2{,}18\cdot 10^{-10}$ m dostaneme

$$q_T = 16{,}56\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$$

V prípade nízkeho tlaku musíme uvažovať tok tepla ako prenos energie jednotlivými molekulami, ktoré dopadnú na jednotku plochy a v priestore medzi doštičkami sa nezrazili. Každá molekula prenesie (v prvom priblížení) energiu $\dfrac{C_V}{N_\mathrm{A}}(T_2 - T_1)$, kde C_V je molekulové teplo za konštantného objemu a N_A. je Avogadrovo číslo. Teda hustota toku tepla je daná ako

$$q_T = \frac{1}{4}n\langle v\rangle\frac{C_V}{N_\mathrm{A}}(T_2 - T_1) = 2{,}78\cdot 10^{-1}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$$

2.7. Stredná voľná dráha atómov hélia pri tlaku 1 kPa a teplote 20 °C je $1{,}8\cdot 10^{-5}$ m. Vypočítajte koeficient difúzie hélia.

Riešenie

Dosadením číselných hodnôt do zjednodušeného výrazu pre koeficient difúzie dostaneme

$$D = \frac{1}{3}\langle v_\mathrm{a}\rangle\lambda = 7{,}47\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$$

2.8. Koeficient difúzie kyslíka pri teplote 0 °C je rovný hodnote $1{,}9\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$. Určite strednú voľnú dráhu molekúl kyslíka.

Riešenie

Z jednoduchého vzťahu pre koeficient difúzie vyplýva

$$\lambda = \frac{3D}{\langle v_\mathrm{a}\rangle} = 1{,}34\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}$$

2.9. Koeficient vnútorného trenia dusíka pri teplote 0 °C je rovný hodnote $\eta = 1{,}64 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}}$ [1, 2]. Určite hodnotu strednej voľnej dráhy molekúl dusíka pri atmosférickom tlaku.

Riešenie

Koeficient vnútorného trenia (viskozity) pre ideálny plyn môžeme vyjadriť v tvare

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v_\mathrm{a} \rangle \lambda \rho$$

kde $\langle v_\mathrm{a} \rangle$ je stredná aritmetická rýchlosť, λ je stredná voľná dráha a ρ je hustota plynu. Po dosadení za príslušné veličiny dostaneme

$$\lambda = \frac{3\eta}{p} \sqrt{\frac{\pi RT}{8M}} = 8{,}66 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}$$

2.10. Koeficient difúzie vodíka pri teplote 0 °C a atmosférickom tlaku má hodnotu $1{,}31 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$. Určite hodnotu koeficienta vnútorného trenia vodíka za tých istých podmienok.

Riešenie

Z porovnania jednoduchých výrazov pre koeficient difúzie a koeficient vnútorného trenia v prípade ideálneho plynu dostaneme

$$\eta = D\rho$$

kde $\rho = m \cdot n = (M/N_\mathrm{A})n$ je hustota plynu. Po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$\eta = 1{,}17 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}}$$

2.11. Koeficient viskozity oxidu uhličitého pri atmosférickom tlaku a 20 °C má hodnotu $\eta = 1{,}4 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Pa \cdot s}$ [2,3]. Vypočítajte strednú voľnú dráhu molekúl CO_2 a koeficient difúzie pri tých istých podmienkach.

Riešenie

Zo zjednodušeného vzťahu medzi koeficientmi difúzie a viskozity dostaneme

$$D = \frac{\eta}{\rho}$$

kde ρ je hustota plynu určená vzťahom $\rho = Mp/RT$. Po vyčíslení dostaneme

$$D = 7{,}65 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$$

Strednú voľnú dráhu vypočítame z koeficienta difúzie ako

$$\lambda = \frac{3D}{\langle v_\mathrm{a} \rangle} = 6{,}1 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}$$

2.12. Koeficient vnútorného trenia vodíka za určitých podmienok má hodnotu $\eta = 8{,}6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Pa \cdot s}$. Určite koeficient tepelnej vodivosti vodíka za tých istých podmienok.

Riešenie

Jednoduchý vzťah medzi koeficientmi tepelnej vodivosti a viskozity je vyjadrený ako

$$\Lambda_T = c_V \eta$$

kde pre merné molekulové teplo za konštantného objemu platí $c_V = 5R/2M = 10\,392{,}5$, z čoho

$$\Lambda_T = 8{,}94 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$$

2.13. Koeficient tepelnej vodivosti kyslíka pri teplote 100 °C má hodnotu $\Lambda_T = 3{,}25 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Vypočítajte koeficient viskozity kyslíka pri tej istej teplote.

Riešenie

Pomocou jednoduchého vzťahu medzi koeficientom tepelnej vodivosti a viskozity plynu, vypočítame hľadanú hodnotu, t. j.

$$\eta = \frac{\Lambda_T}{c_V}$$

kde c_V je molekulové merné teplo za konštantného objemu. Po vyčíslení dostaneme

$$\eta = 5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Pa \cdot s}$$

2.14. Vzdialenosť medzi pohybujúcou sa a nepohybujúcou sa doštičkou je 10 mm. Približne koľko laminárnych vrstiev dusíka sa uloží medzi týmito doštičkami pri tlaku 13,33 Pa a teplote 0 °C.

Riešenie

Pod laminárnou vrstvou budeme chápať vrstvu, ktorej hrúbka je rovná strednej voľnej dráhe molekúl. Výpočtom dostaneme pre strednú voľnú dráhu molekúl dusíka pri zadaných parametroch hodnotu $\lambda_{N_2} = 4{,}56 \cdot 10^{-4}$ m. Ak predelíme vzdialenosť medzi doštičkami strednou voľnou dráhou molekúl, dostaneme hodnotu približne 22, čo zodpovedá počtu vrstiev.

Ak dosadíme za strednú voľnú dráhu molekúl dusíka hodnotu vypočítanú v príklade 2.9., potom pri tlaku 13,33 Pa je $\lambda_{N_2} = 6{,}58 \cdot 10^{-4}$ m a počet vrstiev je len 15.

2.15. Kyslík (plyn 1) a oxid uhličitý (plyn 2) sa nachádzajú pri rovnakých tlakoch a teplote. Predpokladajme, že ich priemery molekúl sú rovnaké. Nájdite vzťah medzi koeficientmi difúzie, viskozity a tepelnej vodivosti týchto dvoch plynov.

Riešenie

Pre koeficienty difúzie, pre ideálne plyny platí

$$D_1 = A/\sqrt{M_1} \quad \text{a} \quad D_2 = A/\sqrt{M_2}$$

z čoho

$$D_2/D_1 = \sqrt{M_1/M_2} = \sqrt{32/44} = 0{,}853$$

Pre koeficienty viskozity platí

$$\eta_1 = A'M_1A/\sqrt{M_1} = B\sqrt{M_1} \quad \text{a} \quad \eta_2 = B\sqrt{M_2}$$

z čoho

$$\eta_2/\eta_1 = \sqrt{M_1/M_2} = 1{,}173$$

Pre koeficienty tepelnej vodivosti ideálneho plynu platí

$$\Lambda_{T,1} = c_{V1}\eta_1 = B'/M_1(B\sqrt{M_1}) = C/\sqrt{M_1} \quad \text{a} \quad \Lambda_{T,2} = C/\sqrt{M_2}$$

z čoho znovu ako v prípade difúzie dostaneme

$$\Lambda_{T,2}/\Lambda_{T,1} = \sqrt{M_1/M_2} = 0{,}853$$

2.16. Cez plochu 100 cm^2 za čas 10 s v dôsledku difúzie prejde určité množstvo dusíka. Gradient hustoty v kolmom smere na plochu je rovný $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}x = 1{,}26\ \mathrm{kg \cdot m^{-4}}$ a nemení sa počas difúzie. Difúzia prebieha pri teplote 27 °C, pri tlaku dusíka, kedy je stredná voľné dráha molekúl dusíka rovná 10^{-5} cm a efektívny priemer molekuly je $3{,}75 \cdot 10^{-10}$ m. Určite hodnotu koeficientu vnútorného trenia za uvedených podmienok a množstvo predifundovaného dusíka za uvedený čas cez uvedenú plochu.

Riešenie

Z podmienky úlohy možno bezprostredne určiť koeficient difúzie $D = \lambda\langle v_a\rangle/3$. Koeficient vnútorného trenia súvisí s koeficientom difúzie ako $\eta = D\rho$, kde ρ je hustota dusíka. Po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$\eta = 1{,}013 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Pa \cdot s}$$

Pre množstvo predifundovaného dusíka pri stacionárnom difúznom procese a ustálenom gradiente hustoty platí

$$|\Delta m| = |-D(\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}x)S\Delta t|$$

kde S je plocha cez ktorú difunduje dusík a Δt je čas difúzie. Po vyčíslení dostaneme

$$\Delta m = 2{,}1\cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg}$$

2.17. Majme veľkú nádobu naplnenú čistým dusíkom na tlak 101 kPa pri teplote 298 K. V stene nádoby hrubej 1 cm nech je otvor s prierezom 1 cm^2. Vypočítajte difúzny tok kyslíka do nádoby cez uvedený otvor z okolitého vzduchu.

Riešenie

Pretože sú parametre dusíka a vzduchu skoro rovnaké, uvažujeme difúziu kyslíka ako vlastnú difúziu. Pre difúzny tok cez plochu S platí

$$|\Gamma_\mathrm{A}| = |-D\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}S|$$

kde $D = \langle v_\mathrm{a}\rangle\lambda/3$ je koeficient samodifúzie a $\mathrm{d}n/\mathrm{d}x$ je gradient koncentrácie kyslíka len v otvore, pretože môžeme zanedbať časový vzrast koncentrácie kyslíka vo veľkej nádobe.

Ak $\langle v_\mathrm{a}\rangle = 444\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, a $\lambda_{\mathrm{O}_2} = 6{,}922\cdot 10^{-8}$ m (uvažujeme kyslík ako ideálny plyn), potom koeficient difúzie má hodnotu $D = 1{,}024\,46\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$.

Aby sme vypočítali gradient častíc kyslíka, potrebujeme určiť jeho koncentráciu vo vzduchu pri atmosférickom tlaku, ak vieme, že parciálny tlak kyslíka je $2{,}12\cdot 10^4$ Pa. Potom $n_{\mathrm{O}_2} = 5{,}15\cdot 10^{24}$ molekúl v 1 m^3. Pre gradient dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = \frac{5{,}15\cdot 10^{24}}{10^{-2}} = 5{,}15\cdot 10^{26}\ \text{molekúl}\cdot\mathrm{m}^{-4}$$

Pre difúzny tok kyslíka do dusíka potom máme

$$\Gamma_S = 1{,}024\,46\cdot 10^{-5} \times 5{,}15\cdot 10^{26} \times 10^{-4} = 5{,}277\cdot 10^{17}\ \text{molekúl}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Ak predelíme difúzny tok Loschmidtovým číslom, dostaneme predifundovaný objem kyslíka pri atmosférickom tlaku a 20 °C, t. j.

$$V = \frac{\Gamma_S}{n_\mathrm{L}} = \frac{5{,}277\cdot 10^{17}}{2{,}687\cdot 10^{25}} = 1{,}963\,7\cdot 10^{-8}\ \mathrm{m^3\cdot s^{-1}} = 1{,}963\,7\cdot 10^{-2}\ \mathrm{cm^3\cdot s^{-1}}$$

2.18. Určite tlak v nádobe ponorenej do kvapalného vzduchu (teplota rovná −190 °C), ak ionizačný vákuometer pripojený vo väčšej vzdialenosti pri laboratórnej teplote (20 °C) ukazuje tlak

a) $1{,}6\cdot 10^{-3}$ Pa,

b) $4\cdot 10^{-5}$ Pa.

Riešenie

Pre tento prípad môžeme využiť vzťahy platné pre tepelnú transpiráciu molekúl (resp. termomolekulárne prúdenie plynov) t. j. $p_1 : p_2 = \sqrt{T_1} : \sqrt{T_2}$. Po dosadení zodpovedajúcich hodnôt dostaneme

a) $p_1 = 8{,}52\cdot 10^{-4}$ Pa,

b) $p_2 = 2{,}13\cdot 10^{-5}$ Pa.

3 INTERAKCIA PLYNOV S POVRCHOM TUHÉHO TELESA VO VÁKUU

3.1. Koľko molekúl vzduchu obsahuje monomolekulárna vrstva molekúl vzduchu na vnútornej stene elektrónky, ak jej plocha je 25 cm^2.

Riešenie

Počet molekúl N určíme predelením plochy elektrónky prierezom jednej molekuly vzduchu. Ak stredný priemer molekuly vzduchu je $3{,}75 \cdot 10^{-10}$ m, potom $N = 2{,}263\,5 \cdot 10^{16}$ molekúl.

3.2. Vypočítajte počet molekúl vzduchu, ktoré dopadajú na plochu 1 cm^2 za l s pri teplote 273 K a tlakoch 10^2, 10^{-5} a 10^{-9} Pa.

Riešenie

Pre počet molekúl plynu dopadajúcich na plochu 1 cm za čas 1 s platí $\nu^* = n\langle v_a\rangle/4$. Po dosadení číselných hodnôt dostaneme pre uvedené tlaky nasledovné počty častíc $2{,}96 \cdot 10^{18}$ $cm^{-2} \cdot s^{-1}$; $2{,}96 \cdot 10^{11}$ $cm^{-2} \cdot s^{-1}$ a $2{,}96 \cdot 10^{7}$ $cm^{-2} \cdot s^{-1}$.

3.3. Určite objem plynu vytvorený dopadajúcimi molekulami vzduchu na plochu 1 m^2 steny nádoby za čas 1 s pri teplote 20 °C.

Riešenie

Pre objem plynu vytvorený dopadajúcimi molekulami plynu na plochu o veľkosti A m^2 za čas 1 s platí

$$V_A = 36{,}38 A \sqrt{\frac{T}{M}} \quad [m^3 \cdot s^{-1}]$$

Po dosadení číselných údajov, pričom $M_{vzd} = 29$, dostaneme

$$V = 115{,}6 \ m^3/(m^2 \cdot s) = 11{,}56 \ l/(cm^2 \cdot s)$$

3.4. Vypočítajte dobu pobytu molekuly plynu s väzobnou energiou $5 \cdot 10^4$ $kJ \cdot kmol^{-1}$ na povrchu tuhej látky pri teplotách 100 K, 300 K a 1 000 K, ak najmenšia možná doba pobytu molekuly $\tau_0 = 10^{-13}$ s.

Riešenie

Pre dobu pobytu molekuly na povrchu tuhého telesa platí vzťah

$$\tau = \tau_0 \exp\left\{\frac{W_{des}}{RT}\right\}$$

Po dosadení zodpovedajúcich hodnôt dostaneme [12]

$$\tau_{100} = 10^{-13} \exp\left\{\frac{5 \cdot 10^4}{8{,}314 \cdot 100}\right\} = 10^{-13} e^{60{,}14} = 10^{-13} \times 1{,}313 \cdot 10^{26} = 1{,}313 \cdot 10^{13} \ s = 3 \cdot 10^5 \ rokov$$

$$\tau_{300} = 10^{-13} \exp\left\{\frac{5 \cdot 10^4}{8{,}314 \cdot 300}\right\} = 5{,}08 \cdot 10^{-5} \ s$$

$$\tau_{1\,000} = 10^{-13} \exp\left\{\frac{5 \cdot 10^4}{8{,}314 \cdot 1\,000}\right\} = 4{,}09 \cdot 10^{-11} \ s$$

3.5. Vypočítajte dobu pobytu molekuly oxidu uhličitého CO_2 na povrchu aktívneho uhlia pri 300 K, ak adsorpčná energia je $3{,}4\cdot 10^4$ kJ·kmol^{-1} a ak najmenšia doba pobytu molekuly je $\tau_0 = 10^{-13}$ s.

Riešenie

Podobne ako v predchádzajúcom príklade vypočítame

$$\tau = 10^{-13}\exp\left\{\frac{3{,}4\cdot 10^4}{8{,}314\cdot 300}\right\} = 8{,}32\cdot 10^{-8}\ \text{s}$$

3.6. Vypočítajte množstvo desorbovaného vodíka z jednotkovej plochy niklového plechu s hrúbkou 1 cm za 1 000 s pri teplote 300 K a 1 000 K, ak začiatočná koncentrácia je $n_0 = 0{,}1$ kg·m^{-3} a koeficient difúzie môžeme vyjadriť v tvare

$$D = 2\cdot 10^{-7}\exp\left\{-\frac{4\,350}{T}\right\}\ \text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$$

Za rovnakých podmienok vypočítajte aj množstvo desorbovaného dusíka z ocele, ak koeficient difúzie môžeme vyjadriť v tvare

$$D = 10^{-5}\exp\left\{-\frac{17\,000}{T}\right\}\ \text{m}^2\cdot\text{s}^{-1} \qquad [12]$$

Riešenie

Najprv spočítame hodnoty koeficientov difúzie pre 300 K a 1000 K. Koeficienty difúzie vodíka v nikli sú [8, 12]

$$D_{300} = 2\cdot 10^{-7}\exp\left\{-\frac{4\,350}{300}\right\} = 1\cdot 10^{-13}\ \ \text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$$

$$D_{1\,000} = 2\cdot 10^{-7}\exp\left\{-\frac{4\,350}{1\,000}\right\} = 2{,}58\cdot 10^{-9}\ \ \text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$$

Koeficienty difúzie dusíka v oceli majú hodnoty [8, 12]

$$D_{300} = 10^{-5}\exp\left\{-\frac{17\,000}{300}\right\} = 2{,}45\cdot 10^{-30}\ \ \text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$$

$$D_{1\,000} = 10^{-5}\exp\left\{-\frac{17\,000}{1\,000}\right\} = 4{,}14\cdot 10^{-13}\ \ \text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$$

Spočítame teraz, či pre náš požadovaný čas ohrevu resp. desorpcie 1 000 s, môžeme použiť zjednodušený vzťah. Ak áno, potom musí platiť

$$\frac{Dt}{d^2} < \frac{\pi}{96} \qquad \text{resp.} \qquad 5\cdot 10^{-2}$$

Pre najväčší koeficient difúzie dostaneme

$$\frac{2{,}56\cdot 10^{-9}\ \ \text{m}^2\text{s}^{-1}\times 1\,000\ \ \text{s}}{(10^{-2}\ \ \text{m})^2} = 2{,}56\cdot 10^{-2} < \frac{\pi}{96}$$

Za týchto predpokladov pre jednotlivé množstvá dostaneme

$$\frac{G_{H_2,300}}{A} = n_0\sqrt{\frac{D}{\pi t}} = 0{,}1\sqrt{\frac{10^{-13}}{\pi 10^3}} = 5{,}64\cdot 10^{-10}\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\frac{G_{H_2,1\,000}}{A} = n_0\sqrt{\frac{D}{\pi t}} = 0{,}1\sqrt{\frac{2{,}58\cdot 10^{-9}}{\pi 10^3}} = 9{,}06\cdot 10^{-8}\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\frac{G_{\mathrm{N}_2,300}}{A}=n_0\sqrt{\frac{D}{\pi t}}=0{,}1\sqrt{\frac{2{,}45\cdot 10^{-30}}{\pi 10^3}}=2{,}82\cdot 10^{-18}\ \mathrm{kg\cdot m^{-2}\cdot s^{-1}}$$

$$\frac{G_{\mathrm{N}_2,1\,000}}{A}=n_0\sqrt{\frac{D}{\pi t}}=0{,}1\sqrt{\frac{4{,}14\cdot 10^{-13}}{\pi 10^3}}=1{,}148\cdot 10^{-9}\ \mathrm{kg\cdot m^{-2}\cdot s^{-1}}$$

3.7. Určite o koľkokrát sa zmenší rýchlosť uvoľňovania dusíka z plátkov nízkouhlíkovej ocele pri zvýšení teploty vyhrievania zo 673 K na 773 K pri rovnakej dobe ohrevu.

Riešenie

Pre koeficient difúzie dusíka v ocele môžeme napísať vzťah [8, 12]

$$D=1{,}07\cdot 10^{-5}\exp\left\{-\frac{2{,}85\cdot 10^5}{2\times 8{,}314\times T}\right\}$$

Pre pomer rýchlosti uvoľňovania plynov môžeme písať

$$\frac{\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)_{x=0,\,T=673\ \mathrm{K}}}{\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)_{x=0,\,T=773\ \mathrm{K}}}=\exp\left\{-\frac{2{,}85\cdot 10^5}{2\times 8{,}314}\left(\frac{1}{673}-\frac{1}{773}\right)\right\}=\frac{1}{5{,}2}$$

t. j. pri zvýšení teploty o 100 K vzrastie efektívnosť odplyňovania (vyhrievania) o viac ako 5-krát.

Pomocou rýchlosti uvoľňovania plynov a koeficientu difúzie dostaneme taktiež pre časy ohrevu t_1 a t_2 pri teplotách T_1 a T_2 nasledujúci pomer

$$\frac{t_1}{t_2}=\frac{D_2}{D_1}=\exp\left\{-\frac{E_D}{2R}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)\right\}$$

Tieto časy sú nutné na získanie rovnakého toku uvoľňovania plynov. Ak použijeme rovnaké zvýšenie teploty, dostaneme, že môžeme skrátiť čas ohrevu viac ako 28-krát pri zvýšení teploty o 100 K.

3.8. Určite tok dusíka uvoľneného z oceľovej doštičky s plochou 100 cm^2 a hrúbkou b = 8 mm za čas 1 800 s pri jej ohriatí na 1 000 °C.

Riešenie

Nech množstvo dusíka v oceli je 3,44 $\mathrm{m^3\cdot Pa\cdot kg^{-1}}$ a nech koeficient difúzie dusíka v oceli pri teplote 1 000 °C má hodnotu $D = 1{,}35\cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$.

Jednoduchý vzťah pre hustotu toku uvoľneného plynu z doštičky je daný ako

$$q'=(n_0-n)\sqrt{\frac{D}{\pi t}}$$

kde n_0 je začiatočná koncentrácia atómov v oceli a n je koncentrácia na povrchu. Tento jednoduchý vzťah môžeme použiť len ak doba ohrevu je menšia ako teoretická, t. j.

$$t\le 0{,}024\,4\frac{b^2}{D}=0{,}024\,4\frac{(8\cdot 10^{-3})^{-2}}{1{,}35\cdot 10^{-11}}=115\,600\ \mathrm{s}$$

Naša doba ohrevu 1 800 s je menšia ako sme vypočítali z teórie. Môžeme teda použiť zjednodušený vzťah pre výpočet hustoty toku plynu. Pretože začiatočná koncentrácia dusíka je vysoká, zanedbáme koncentráciu častíc n na povrchu. Ak zoberieme za hustotu našej ocele hodnotu $\rho = 7{,}85\cdot 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ môžeme písať

$$q'=3{,}44\times 7{,}85\cdot 10^3\sqrt{\frac{1{,}35\cdot 10^{-11}}{\pi\cdot 1\,800}}=1{,}32\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3\cdot Pa/(m^2\cdot s)}$$

Celkový tok dusíka uvoľneného z doštičky s plochou 100 cm^2 je potom daný ako

$$Q' = q'A = 1{,}32 \cdot 10^{-3} \times 2 \cdot 10^{-2} = 2{,}64 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3 \cdot Pa \cdot s^{-1}}$$

3.9. Vypočítajte tok plynov, ktoré predifundujú z atmosférického vzduchu do vákuovej nádoby cez palec z nerezovej ocele vyhriaty na teplotu 1 000 °C, ak rozmery palca sú: vnútorný priemer 25 mm, dĺžka 150 mm a hrúbka steny 2,5 mm.

Riešenie

Jednoduchým výpočtom zistime, že vnútorný povrch palca je 97,4 cm^2 = 9,7 · 10^{-3} m^2.

Za konštanty (koeficienty) prenikania plynov pre nerezovú oceľ budeme brať koeficienty pre železo, ktoré sú [8]:

		P [m^3·Pa/(m^2·s)]	P_0 [m^3·Pa/(m^2·s)]	Q_P [kJ·kmol^{-1}]
H_2	975 K	$1{,}31 \cdot 10^{-6}$	$1{,}88 \cdot 10^{-4}$	$8{,}04 \cdot 10^{4}$
N_2	1 387 K	$1{,}93 \cdot 10^{-6}$	$5{,}19 \cdot 10^{-4}$	$1{,}996 \cdot 10^{5}$
$CO \approx O_2$	1 266 K	$1{,}93 \cdot 10^{-6}$	$1{,}51 \cdot 10^{-4}$	$1{,}557 \cdot 10^{5}$

Hodnotu koeficientu prenikania pre vodík v kove pri 1 000 °C spočítame podľa vzťahu

$$P_{H_2} = P_0 \exp\left\{-\frac{Q_P}{2RT}\right\} = 1{,}88 \cdot 10^{-4} \exp\left\{-\frac{8{,}04 \cdot 10^4}{2 \times 8{,}314 \times 1\,273}\right\} = 4{,}213 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^3 \cdot Pa \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$$

Za spád vodíka považujeme jeho parciálny tlak vo vzduchu, t. j.

$$p_{h_2} = 5{,}06 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{Pa}$$

Hustotu toku vodíka cez stenu vypočítame pomocou vzťahu

$$q'_{H_2} = P\frac{\sqrt{p_1 - p_0}}{b} = 4{,}213 \cdot 10^{-6}\,\frac{\sqrt{5{,}06 \cdot 10^{-2}}}{2{,}5 \cdot 10^{-3}} = 3{,}79 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^3 \cdot Pa \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$$

Podobne spočítame predifundované hustoty tokov aj pre N_2 a $O_2 \approx CO$. Dostaneme

$$P_{N_2} = P_0 \exp\left\{-\frac{Q_P}{2RT}\right\} = 5{,}19 \cdot 10^{-4} \exp\left\{-\frac{1{,}996 \cdot 10^5}{2 \times 8{,}314 \times 1\,273}\right\} = 4{,}168 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m^3 \cdot Pa \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$$

$$P_{N_2} = 7{,}9 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa} \quad \text{a} \quad q'_{N_2} = P\frac{\sqrt{p_{N_2}}}{2{,}5 \cdot 10^{-3}} = 4{,}686 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3 \cdot Pa \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$$

$$P_{O_2} \approx P_{CO} = 1{,}51 \cdot 10^{-4} \exp\left\{-\frac{1{,}557 \cdot 10^5}{2 \times 8{,}314 \times 1\,273}\right\} = 9{,}65 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m^3 \cdot Pa \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$$

$$P_{O_2} = 2 \times 12 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa} \quad \text{a} \quad q'_{O_2} = 5{,}619\,4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3 \cdot Pa \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$$

Výsledný tok vzduchu dostaneme vynásobením jednotlivých hustôt tokov plochou palca a ich sčítaním, čiže

$$Q'_{\Sigma} = (q'_{H_2} + q'_{N_2} + q'_{O_2}) \times A = 1{,}040\,6 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^3 \cdot Pa \cdot s^{-1}}$$

3.10. Vypočítajte toky kyslíka a dusíka, ktoré preniknú cez gumové tesnenie s plochou 74 cm^2 a hrúbky 1 cm pri laboratórnej teplote 25 °C.

Riešenie

Koeficienty prenikania cez gumové tesnenie pre uvedené plyny nech sú dané nasledujúcimi vzťahmi [8]

Plyn	P_0 [$m^3 \cdot Pa \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$]	Q_P [$kg \cdot kmol^{-1}$]	P_{298} [$m^3 \cdot Pa \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$]
N_2	$3{,}56 \cdot 10^{-7}$	$2{,}598 \cdot 10^4$	$9{,}94 \cdot 10^{-12}$
O_2	$1{,}1 \cdot 10^{-5}$	$3{,}14 \cdot 10^4$	$3{,}445\,6 \cdot 10^{-11}$

Pre koeficient prenikania dusíka cez gumové tesnenie dostaneme

$$P_{N_2} = P_0 \exp\left\{-\frac{Q_P}{RT}\right\} = 3{,}56 \cdot 10^{-7} \exp\left\{-\frac{2{,}598 \cdot 10^4}{8{,}314 \times 298}\right\} = 9{,}94 \cdot 10^{-12}\ m^3 \cdot Pa \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$$

Pre tok dusíka cez tesnenie dostaneme

$$Q_{N_2} = P_{N_2} \times p_{N_2} \times \frac{A}{b} = 9{,}94 \cdot 10^{-12} \times 7{,}9 \cdot 10^4\, \frac{7{,}4 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-2}} = 5{,}81 \cdot 10^{-7}\ m^3 \cdot Pa \cdot s^{-1}$$

Pre koeficient prenikania kyslíka cez gumové tesnenie dostaneme hodnotu

$$P_{O_2} = 1{,}1 \cdot 10^{-5} \exp\left\{-\frac{3{,}14 \cdot 10^4}{8{,}314 \times 298}\right\} = 3{,}445\,6 \cdot 10^{-11}\ m^3 \cdot Pa \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$$

Pre tok kyslíka cez tesnenie platí

$$Q_{O_2} = P_{O_2} \times p_{O_2} \times \frac{A}{b} = 3{,}445\,6 \cdot 10^{-11} \times 2{,}12 \cdot 10^4\, \frac{7{,}4 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-2}} = 5{,}405\,5 \cdot 10^{-7}\ m^3 \cdot Pa \cdot s^{-1}$$

Tok vodíka, hélia a ďalších plynov neuvažujeme. Potom výsledný tok plynu je rovný súčtu tokov kyslíka a dusíka, t. j.

$$Q = 1{,}12 \cdot 10^{-6}\ m^3 \cdot Pa \cdot s^{-1}$$

3.11. Vypočítajte časovú závislosť vzrastu parciálneho tlaku hélia vo vákuovotesnej sklenenej nádobe s objemom 1 liter, vyčerpanej na tlak $1{,}33 \cdot 10^{-10}$ Pa pri teplote 293 K, ak povrch nádoby je 500 cm^2 a hrúbka steny je 0,1 cm. Hodnota koeficienta prenikania je $2{,}5 \cdot 10^{-14}\ m^2 \cdot s^{-1}$.

Riešenie

Tok hélia cez plochu A je určený výrazom

$$q = P\, p_{He} \frac{A}{b}$$

kde p_{He} je parciálny tlak hélia vo vzduchu rovný $5{,}33 \cdot 10^{-1}$ Pa. Z definičného vzťahu pre tok plynu $q = pV/t$ po dosadení dostaneme

$$p = \frac{q}{V} t = \frac{P\, p_{He} A}{bV} t = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-14} \times 5{,}33 \cdot 10^{-1} \times 5 \cdot 10^{-2}}{10^{-3} \times 10^{-3}} t = \frac{12{,}5 \times 5{,}33 \cdot 10^{-17}}{10^{-6}} t = 6{,}66 \cdot 10^{-10}\, t\ [Pa]$$

Výsledná časová závislosť vzrastu tlaku je vyjadrená ako

$$p' = p_\infty + p = 1{,}33 \cdot 10^{-10} + 6{,}66 \cdot 10^{-10}\, t \approx 6{,}66 \cdot 10^{-10}\, t\ [Pa]$$

3.12. Určite rýchlosť desorpcie z medeného povrchu vákuovej nádoby o ploche 1 320 cm pri laboratórnej teplote 298 K po dobu 6 hodín.

Riešenie

Podľa vzťahu $\ln q'_{p1} = A - Bt$ vypočítame rýchlosť mernej desorpcie medených povrchov, ak za hodnoty konštánt zoberieme tie, ktoré zodpovedajú morenej a prepláchnutej medi v benzole a acetóne, t. j. [8, 13]

$$\ln q'_{p1} = -4{,}686 - 7{,}73 \cdot 10^{-5}\, t$$

Potom podľa vzťahu

$$Q'_{p1} = q'_{p1} \cdot A$$

kde A je uvažovaný povrch, určíme výslednú rýchlosť desorpcie. Výsledky sú uvedené v tabuľke.

čas [s]	q'_{p1} [$m^3 \cdot Pa \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$]	Q'_{p1} [$m^3 \cdot Pa \cdot s^{-1}$]
2 000	$1{,}443 \cdot 10^{-5}$	$1{,}905 \cdot 10^{-6}$
3 000	$1{,}21 \cdot 10^{-5}$	$1{,}595 \cdot 10^{-6}$
4 000	$1{,}01 \cdot 10^{-5}$	$1{,}335 \cdot 10^{-6}$
5 000	$8{,}46 \cdot 10^{-6}$	$1{,}117 \cdot 10^{-6}$
6 000	$7{,}08 \cdot 10^{-6}$	$9{,}35 \cdot 10^{-7}$
8 000	$4{,}96 \cdot 10^{-6}$	$6{,}549 \cdot 10^{-7}$
10 000	$3{,}475 \cdot 10^{-6}$	$4{,}587 \cdot 10^{-7}$
12 000	$2{,}43 \cdot 10^{-6}$	$3{,}21 \cdot 10^{-7}$
15 000	$1{,}427 \cdot 10^{-6}$	$1{,}884 \cdot 10^{-7}$
18 000	$8{,}367 \cdot 10^{-7}$	$1{,}1 \cdot 10^{-7}$
20 000	$5{,}86 \cdot 10^{-7}$	$7{,}737 \cdot 10^{-8}$
21 600	$4{,}409 \cdot 10^{-7}$	$5{,}82 \cdot 10^{-8}$

3.13. Vypočítajte rýchlosti desorpcie pri laboratórnej teplote z povrchu vákuovej nádoby, vyhotovenej z nerezovej ocele s plochou 8 655 cm^2, počas odčerpávania trvajúceho 6 hodín.

Riešenie

Podľa tabuliek nájdeme pre nehrdzavejúcu oceľ [8,13]

$$\ln q'_{p1} = A - Bt = -3{,}463 - 4{,}16 \cdot 10^{-5}\, t$$

Výsledky výpočtov sú v nasledujúcej tabuľke

čas [s]	q_{p1} [$m^3 \cdot Pa \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$]	Q_{p1} [$m^3 \cdot Pa \cdot s^{-1}$]
2 000	$2{,}84 \cdot 10^{-4}$	$2{,}46 \cdot 10^{-4}$
3 000	$2{,}583 \cdot 10^{-4}$	$2{,}236 \cdot 10^{-4}$
4 000	$2{,}347 \cdot 10^{-4}$	$2{,}03 \cdot 10^{-4}$
5 000	$2{,}133 \cdot 10^{-4}$	$1{,}846 \cdot 10^{-4}$
6 000	$1{,}938 \cdot 10^{-4}$	$1{,}677 \cdot 10^{-4}$
8 000	$1{,}60 \cdot 10^{-4}$	$1{,}385 \cdot 10^{-4}$
10 000	$1{,}32 \cdot 10^{-4}$	$1{,}143 \cdot 10^{-4}$
12 000	$1{,}09 \cdot 10^{-4}$	$9{,}44 \cdot 10^{-5}$
15 000	$8{,}15 \cdot 10^{-5}$	$7{,}07 \cdot 10^{-5}$
18 000	$6{,}14 \cdot 10^{-5}$	$5{,}31 \cdot 10^{-5}$
20 000	$5{,}04 \cdot 10^{-5}$	$4{,}37 \cdot 10^{-5}$
21 600	$4{,}1 \cdot 10^{-5}$	$3{,}55 \cdot 10^{-5}$

3.14. Vypočítajte rýchlosť desorpcie plynov q z gumového tesnenia vákuovej nádoby počas šesťhodinového odčerpávania, ak celková plocha tesnenia smerujúceho do vákuového systému je 74 cm^2 a je zohriata na teplotu 343 K v dôsledku tepelného žiarenia, pričom výrobca udáva graficky časovú závislosť merného desorpčného toku q' (obr. 3.1) [8, 13].

Riešenie

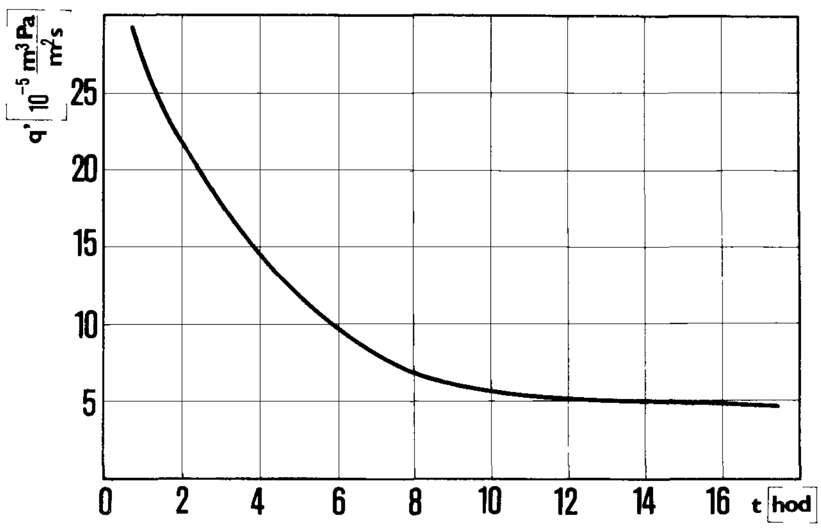
Zo zadaného grafu odčítame q' v jednotlivých časoch a každú hodnotu q' vynásobíme plochou t. j. $7{,}4 \cdot 10^{-3}$ m^2, čím dostaneme hodnoty q uvoľňovaného množstva plynov po zodpovedajúcich dobách čerpania v jednotkách $m^3 \cdot Pa \cdot s^{-1}$.

3.15. Určite potrebný čas na odčerpanie valcovej nádoby o priemere 260 mm a výške 250 mm zhotovenej z nízkouhlíkovej ocele z atmosférického tlaku na tlak $6{,}65 \cdot 10^{-3}$ Pa. Výsledná vnútorná plocha vitonového tesnenia je 50 cm^2. Efektívna čerpacia rýchlosť vákuového systému pri tlaku $6{,}65 \cdot 10^{-3}$ Pa je $1 \cdot 10\ l \cdot s^{-1} = 1 \cdot 10^{-2}\ m^2 \cdot s^{-1}$.

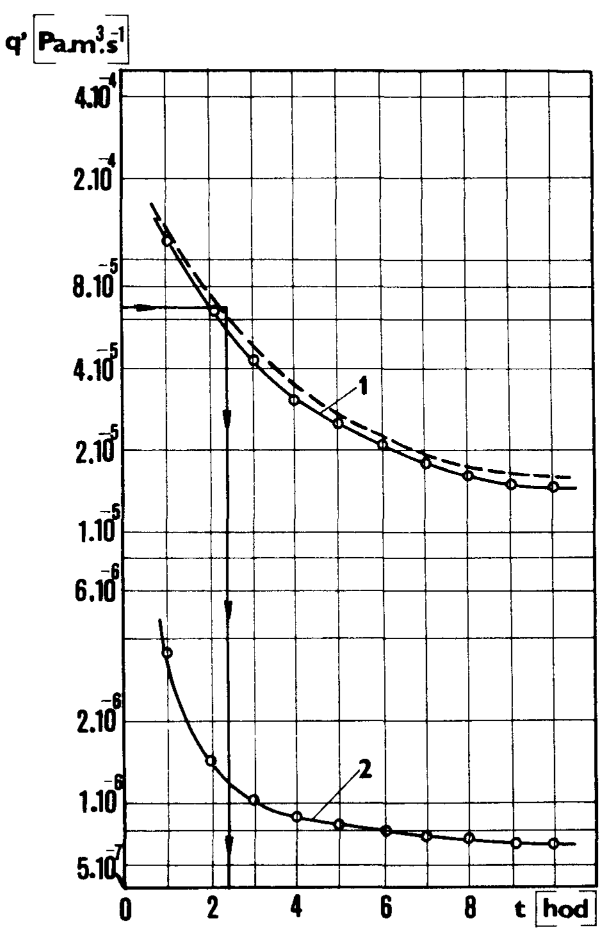
Riešenie

Vnútorný povrch vákuovej nádoby s uvedenými rozmeranú je

$$A_{kov} = 2\pi \frac{(0{,}26)^2}{4} + \pi 0{,}26 \times 0{,}25 = 0{,}11 + 0{,}20 = 0{,}31\ m^2$$



Obr. 3.1 Závislosť merného desorpčného toku q' z gumového tesnenia pri jeho ohreve na teplotu 343 K tepelným žiarením



Obr. 3.2 Časové závislosti desorpčného toku z nízkouhlíkovej ocele s plochou $A_{\mathrm{kov}} = 0{,}31\ \mathrm{m}^2$ – krivka 1 a z vitonu o ploche $0{,}005\ \mathrm{m}^2$ – krivka 2. Výsledný desorpčný tok daný súčtom oboch kriviek – čiarkovaná krivka. Priamkami so šípkami je znázornený výpočet doby čerpania vákuovej aparatúry na tlak $6{,}65 \cdot 10^{-3}$ Pa, čo je cca 2,4 hod.

Ale poznáme časové závislosti merného množstva plynov desorbovaných z nízkouhlíkovej ocele q'_{p1} a vynásobíme ju plochou $A_{\text{kov}} = 0{,}31\ \text{m}^2$ a podobne časovú závislosť uvoľňovania merného množstva plynu z vitonu a vynásobíme ju plochou $0{,}005\ \text{m}^2$, dostaneme krivky desorpcie plynov zo stien vákuovej nádoby a tesnenia, ako sú znázornené na obr. 3.2. Zložením oboch kriviek dostaneme ďalšiu krivku pre výsledné množstvo uvoľnených plynov, ktoré sa bude len málo líšiť od krivky pre uvoľňovanie z kovových stien nádoby.

Tok plynu odčerpávaný z vákuového zariadenia pri tlaku $6{,}65 \cdot 10^{-3}$ Pa je rovný

$$q = pS_{\text{ef}} = 6{,}65 \cdot 10^{-3} \times 10^{-2} = 6{,}65 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3 \cdot \text{Pa} \cdot \text{s}^{-1}$$

Teraz cez bod $q = 6{,}65 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3 \cdot \text{Pa} \cdot \text{s}^{-1}$ na osi y urobíme horizontálnu priamku do priesečníku s výslednou krivkou celkovej desorpcie plynov. Ako výsledok dostaneme, že tlak $p = 6{,}65 \cdot 10^{-3}$ Pa získame za asi 2,4 hod.

3.16. Vypočítajte tok plynov, ktoré sa uvoľnia z 12 valčekov vyrobených z nehrdzavejúcej ocele s polomerom 35 mm a dĺžkou 100 mm (hustota ocele je $7{,}8 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$) počas ich odplyňovania v elektrickej vákuovej peci pri teplote 1 000 °C počas 6 hodín.

Riešenie

Celkový tok desorbovaných plynov zo zohriateho valca je daný vzťahom

$$q_{p1} = q'_{p1} A$$

pričom q'_{p1} určíme ako množstvo desorbovaného plynu dvomi spôsobmi

a) Ak doba odplyňovania, $t < \dfrac{\pi d^2}{96D}$ [s], potom rýchlosť desorpcie je

$$q'_{p1} = C_0 \left(\sqrt{\frac{D}{\pi t}} - \frac{D}{d} \right) \ [\text{m}^3 \cdot \text{Pa} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}]$$

b) Ak čas odplynovania $t > \dfrac{\pi d^2}{96D}$ [s], potom rýchlosť desorpcie je daná vzťahom

$$q'_{p1} = \frac{2C_0 D}{d} \exp\left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{24D}{d^2} t \right\} \ [\text{m}^3 \cdot \text{Pa} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}]$$

Z uvedených vzťahov vyplýva, že pre výpočet rýchlosti desorpcie plynov treba určiť koeficienty difúzie a začiatočné koncentrácie C_0 v materiáli.

Koeficienty difúzie pri 1 000 °C pre vodík, dusík, kyslík a uhlík v nehrdzavejúcej oceli sú [8,13]:

$D_{H_2} = 2{,}15 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ $D_{N_2} = 1{,}55 \cdot 10^{-11}\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ $D_{O_2} = 7{,}47 \cdot 10^{-14}\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

$D_C = 1{,}95 \cdot 10^{-11}\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ $D_{CO} = 5{,}65 \cdot 10^{-9}\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Začiatočná koncentrácia C_0 sa určí podľa vzťahu

$$C_0 = C_M \gamma \ [\text{m}^3 \cdot \text{Pa} \cdot \text{m}^{-3}]$$

kde C_M je množstvo plynov obsiahnutých v 1 kg materiálu a γ je hustota materiálu v jednotkách $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Za začiatočnú hodnotu koncentrácie C_0 sa obvykle berie hodnota o 30 % väčšia, ako je hodnota, ktorá sa rovná výslednému množstvu uvoľneného plynu určeného z tabuliek. (Tabuľka 3.1) [13].

Tabuľka 3.1 Množstvo uvoľneného plynu Q z nízkouhlíkovej ocele

teplota ohrevu [°C]	celkové množstvo	vodík	dusík	CO
400	0,000 887			
500	0,002 87			
600	0,012 7			
700	0,153	0,020 5	0,074 5	0,058 6
800	0,178	0,020 4	0,063 6	0,094 0
900	0,115	0,029 8	0,013 4	0,072
1 000	0,216	0,037	0,036 5	0,142

Množstvá plynov sú uvedené v jednotkách $m^3 \cdot Pa \cdot kg^{-1}$. Napríklad z nízkouhlíkovej ocele sa množstvo uvoľneného vodíka rovná

$$Q = 0{,}020\,5 + 0{,}020\,4 + 0{,}029\,8 + 0{,}037 + 0{,}107\,7 \ m^3 \cdot Pa \cdot kg^{-1}$$

Ak toto množstvo zvýšime o 30 % a vztiahneme to na 1 m^3 materiálu nájdeme hodnotu začiatočnej koncentrácie vodíka

$$C_{0,H_2} = 0{,}107\,7 \times 7\,300 \times 100/70 = 1\,200{,}086 \ m^3 \cdot Pa \cdot m^{-3}$$

Analogicky by sme našli pre dusík a oxid uhoľnatý, t. j.

$$C_{0,N_2} = 0{,}188 \times 7\,800 \times 100/70 = 2\,094{,}86 \ m^3 \cdot Pa \cdot m^{-3}$$

$$C_{0,CO} = 0{,}366\,6 \times 7\,800 \times 100/70 = 4\,085 \ m^3 \cdot Pa \cdot m^{-3}$$

Určíme rýchlosť uvoľňovania merného množstva vodíka. Za tým účelom najprv vypočítame čas vyhrievania, t. j.

$$t = \frac{\pi(3{,}5 \cdot 10^{-2})^2}{96 \times 2{,}15 \cdot 10^{-8}} = 1\,864{,}6 \text{ s} \ll 21\,600 = 6 \text{ hod.}$$

Pretože náš čas vyhrievania je väčší ako vypočítaný čas použijeme pre výpočet množstva uvoľneného plynu q'_{p1} výraz z bodu b). Po logaritmovaní dostaneme

$$\ln q'_{p1} = \ln \frac{2C_0 D}{d} + \frac{\pi}{4} - \frac{24D}{d^2} t$$

a po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$\ln q'_{H_2} = \ln \frac{2 \times 1200 \times 2{,}15 \cdot 10^{-8}}{3{,}5 \cdot 10^{-2}} + 0{,}785\,4 - \frac{24 \times 2{,}15 \cdot 10^{-8}}{(3{,}5 \cdot 10^{-2})^2} t = \ln 1{,}474 \cdot 10^{-3} + 0{,}785\,4 + 4{,}212 \cdot 10^{-4}\, t$$

Potom dostaneme

$$q'_{H_2} = 1{,}474 \cdot 10^{-3} \exp\{0{,}785\,4 - 4{,}212 \cdot 10^{-4}\, t\} \ m^3 \cdot Pa \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$$

Výsledky výpočtov rýchlosti uvoľňovania jednotlivých plynov sú uvedené v tabuľke 3.2.

Tabuľka 3.2 Hodnoty rýchlosti desorpcie merných množstiev jednotlivých plynov z nízkouhlíkovej ocele

Čas [s]	q'_{H_2}	q'_{N_2}	q'_{CO}	q'_{Σ}	q
2 000	$1{,}41 \cdot 10^{-3}$	$1{,}021 \cdot 10^{-4}$	$2{,}28 \cdot 10^{-4}$	$1{,}74 \cdot 10^{-3}$	$2{,}7 \cdot 10^{-4}$
3 000	$9{,}23 \cdot 10^{-4}$	$8{,}357 \cdot 10^{-5}$	$1{,}86 \cdot 10^{-4}$	$1{,}193 \cdot 10^{-3}$	$1{,}85 \cdot 10^{-4}$
4 000	$6{,}06 \cdot 10^{-4}$	$7{,}208 \cdot 10^{-5}$	$1{,}61 \cdot 10^{-4}$	$8{,}391 \cdot 10^{-4}$	$1{,}30 \cdot 10^{-4}$
5 000	$4{,}00 \cdot 10^{-4}$	$6{,}448 \cdot 10^{-5}$	$1{,}44 \cdot 10^{-4}$	$6{,}085 \cdot 10^{-4}$	$1{,}06 \cdot 10^{-4}$
6 000	$2{,}62 \cdot 10^{-4}$	$5{,}868 \cdot 10^{-5}$	$1{,}31 \cdot 10^{-4}$	$4{,}517 \cdot 10^{-4}$	$7{,}01 \cdot 10^{-5}$
8 000	$1{,}14 \cdot 10^{-4}$	$5{,}078 \cdot 10^{-5}$	$1{,}13 \cdot 10^{-4}$	$2{,}778 \cdot 10^{-4}$	$4{,}30 \cdot 10^{-5}$
10 000	$4{,}89 \cdot 10^{-5}$	$4{,}528 \cdot 10^{-5}$	$1{,}01 \cdot 10^{-4}$	$1{,}952 \cdot 10^{-4}$	$3{,}02 \cdot 10^{-5}$
12 000	$1{,}91 \cdot 10^{-5}$	$4{,}128 \cdot 10^{-5}$	$9{,}18 \cdot 10^{-5}$	$1{,}522 \cdot 10^{-4}$	$2{,}36 \cdot 10^{-5}$
15 000	$6{,}02 \cdot 10^{-6}$	$3{,}678 \cdot 10^{-5}$	$8{,}18 \cdot 10^{-5}$	$1{,}240 \cdot 10^{-4}$	$1{,}93 \cdot 10^{-5}$
18 000	$1{,}70 \cdot 10^{-6}$	$3{,}348 \cdot 10^{-5}$	$7{,}45 \cdot 10^{-5}$	$1{,}097 \cdot 10^{-4}$	$1{,}70 \cdot 10^{-5}$
20 000	$7{,}60 \cdot 10^{-7}$	$3{,}168 \cdot 10^{-5}$	$7{,}06 \cdot 10^{-5}$	$1{,}030 \cdot 10^{-4}$	$1{,}59 \cdot 10^{-5}$
21 600	$3{,}81 \cdot 10^{-7}$	$3{,}048 \cdot 10^{-5}$	$6{,}77 \cdot 10^{-5}$	$9{,}856 \cdot 10^{-5}$	$1{,}53 \cdot 10^{-5}$

Určíme rýchlosť desorpcie dusíka. Pre čas odplyňovania dostaneme

$$t = \frac{\pi(3{,}5 \cdot 10^{-2})^2}{96 \times 1{,}55 \cdot 10^{-11}} = 2{,}585 \cdot 10^6 \gg 21\,600 \text{ s} = 6 \text{ hod.}$$

Pretože tento čas je omnoho väčäí ako 21 600 s, budeme počítať množstvo uvoľneného dusíka podľa vzťahu uvedeného pod bodom a), t. j.

$$q'_{N_2} = 2\,095\left(\sqrt{\frac{1{,}55\cdot 10^{-11}}{\pi t}} - \frac{1{,}55\cdot 10^{-11}}{3{,}5\cdot 10^{-2}}\right) = \frac{4{,}653\cdot 10^{-3}}{\sqrt{t}} - 9{,}278\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m^3\cdot Pa\cdot m^{-2}\cdot s^{-1}}$$

Výsledky výpočtov sú uvedené v tabuľke 3.2.

Pri výpočte rýchlosti uvoľňovania oxidu uhoľnatého sa predpokladá, že je táto rýchlosť ohraničená difúziou uhlíka k povrchu, kde atómy uhlíka vytvárajú oxidovú tenkú vrstvu a uvoľňujú sa do objemu ako molekuly CO. Preto výpočty robíme pre systém „železo-uhlík“, pre ktorý je doba odplyňovania

$$t = \frac{\pi(3{,}5\cdot 10^{-2})^2}{96\times 1{,}95\cdot 10^{-11}} = 2{,}056\cdot 10^6 \gg 21\,600\ \mathrm{s} = 6\ \mathrm{hod.}$$

Znovu postupujeme podobne ako v prípade dusíka a dostaneme

$$q'_{CO} = 4\,085\left(\sqrt{\frac{1{,}95\cdot 10^{-11}}{\pi t}} - \frac{1{,}95\cdot 10^{-11}}{3{,}5\cdot 10^{-2}}\right) = \frac{1{,}017\,7\cdot 10^{-2}}{\sqrt{t}} - 2{,}276\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^3\cdot Pa\cdot m^{-2}\cdot s^{-1}}$$

Výsledky výpočtov sú taktiež uvedené v tabuľke 3.2.

Ak sčítame jednotlivé rýchlosti uvoľňovania pre vodík, dusík a oxid uhoľnatý v jednotlivých časoch, dostaneme výsledný tok q'_Σ pre zodpovedajúce časy.

Výsledný tok uvoľňovaných plynov z 12 valčekov dostaneme, keď vynásobíme jednotlivé toky plochou 12 valčekov, ktorá je

$$A_{\text{valč}} = \left(\pi\times 3{,}5\cdot 10^{-2}\times 10^{-1} + \frac{\pi(3{,}5\cdot 10^{-2})^2}{4}2\right)12 = 0{,}155\,0\ \ \mathrm{m^2}$$

Výsledný tok plynov uvoľňovaných plynov q v jednotlivých časoch je taktiež uvedený v tabuľke 3.2. a môžeme ho aj graficky znázorniť ako závislosť q od času.

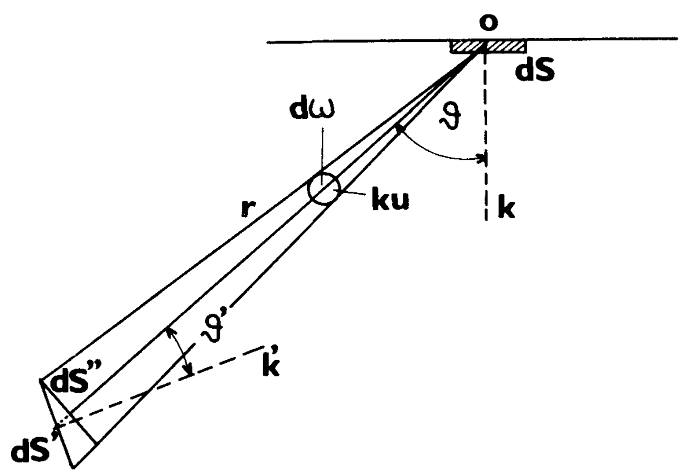
4 VÁKUOVÉ VODIVOSTI KONŠTRUKČNÝCH PRVKOV VÁKUOVEJ APARATÚRY

4.1. Odvoďte výraz pre vodivosť dlhej valcovej trubice v prípade molekulárneho prúdenia, využijúc Knudsenov postup[1].

Riešenie

Uvažujme dlhú valcovú trubicu, ktorej priemer je malý oproti strednej voľnej dráhy molekúl. Na koncoch trubice nech sú tlaky p_1 a p_2. Vo vnútri trubice prevládajú zrážky molekúl so stenami nad ich vzájomnými zrážkami. Okrem toho predpokladajme, že zrážka molekuly so stenami je difúzna.

Na stene trubice si zvolíme v ľubovoľnom mieste element s plochou dS a určíme počet molekúl, ktoré sú vyslané týmto elementom za čas dt a prejdú druhým elementom o ploche dS', ktorý je umiestnený kdekoľvek v trubici. Uvažované molekuly sa pohybujú v smeroch vo vnútri kužeľa k (obr. 4.1) so základňou dS' a vrcholom O na ploche elementu dS.



Obr. 4.1 Geometrické zobrazenie vzájomnej polohy emitujúcej plôšky dS na stene trubice a plôšky dS' ľubovoľnej umiestnenej v trubici, ktorou prechádza časť molekúl emitovaných plôškou dS

Koncentrácia týchto molekúl s rýchlosťami v intervale v až v + dv je daná

$$\frac{1}{4\pi} n_v \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\omega$$

kde dω je priestorový uhol kužeľa k. Počet molekúl s rýchlosťami v intervale v až v + dv a vyslaných elementom dS za čas dt, je daný objemom valca so základňou dS a výškou vdt, ktorého os je rovnobežná s osou kužeľa k. Objem valca je

$$\mathrm{d}S \cdot v \cdot \mathrm{d}t \cdot \cos \vartheta$$

kde ϑ je uhol medzi smerom pohybu molekúl a normálou k ploche dS. Potom celkový počet molekúl v smere uhla ϑ je daný súčinom

$$\frac{1}{4\pi} n_v \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}S\, v\,\mathrm{d}t \cos\vartheta = \frac{1}{4\pi} v n_v \,\mathrm{d}v \cos\vartheta\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}t$$

[1] Tento príklad má výkladový charakter poukazujúci na fyzikálnu podstatu molekulárneho prúdenia. V súčasných učebniciach sa už nevyskytuje, uvádza sa len jeho výsledok. Pravdepodobnostný a štatistický charakter molekulového prúdenia umožňuje využiť aj metódu Monte-Carlo na výpočet vákuovej vodivosti rôznych prvkov pri molekulárnom prúdení plynu.

Integráciou podľa rýchlosti v od 0 do ∞, dostaneme počet všetkých molekúl, ktoré vyslal element $\mathrm{d}S$ za $\mathrm{d}t$ a prejdú plochou $\mathrm{d}S'$. Využijúc definíciu strednej aritmetickej rýchlosti

$$\int_0^\infty v n_v \,\mathrm{d}v = n\langle v_{\mathrm{ar}}\rangle$$

prejde predchádzajúci výraz do tvaru

$$\frac{1}{4\pi} n\langle v_{\mathrm{ar}}\rangle \cos\vartheta \,\mathrm{d}\omega \,\mathrm{d}S \,\mathrm{d}t$$

kde n značí počet molekúl v jednotke objemu a to v mieste, kde je element $\mathrm{d}S$.

Priestorový uhol $\mathrm{d}\omega$ sa tiež volá zorný uhol, pod ktorým vidíme plošný element $\mathrm{d}S'$ z bodu O na $\mathrm{d}S$. Určíme ho takto: Opíšeme guľu z bodu O s polomerom r, čo je najkratšia vzdialenosť plochy $\mathrm{d}S$ od $\mathrm{d}S'$. Náš kužeľ vytne na guľovej ploche plošný element $\mathrm{d}S''$, ktorý je vlastne pravouhlým priemetom plošného elementu $\mathrm{d}S'$. Ak označíme ϑ' uhol medzi normálou k' k $\mathrm{d}S'$ a osou kužeľa, tak

$$\mathrm{d}S'' = \mathrm{d}S' \cos\vartheta'$$

ale $\mathrm{d}S'' = r^2 \mathrm{d}\omega$ a odtiaľ

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{r^2}\mathrm{d}S'' = \frac{1}{r^2}\cos\vartheta' dS'$$

a tak pre počet molekúl, ktoré vyšle za čas $\mathrm{d}t$ element $\mathrm{d}S$ a prejdú cez $\mathrm{d}S'$ je

$$\frac{1}{4\pi r^2} n\langle v_{\mathrm{ar}}\rangle \cos\vartheta \cos\vartheta' \,\mathrm{d}S \,\mathrm{d}S' \,\mathrm{d}t$$

Tento výraz je symetrický vzhľadom k obom elementom, až na to, že koncentrácia n sa vzťahuje k elementu $\mathrm{d}S$. Preto môžeme písať úplne analogicky pre počet molekúl, ktoré vyšle plošný element $\mathrm{d}S'$ za čas $\mathrm{d}t$ do elementu $\mathrm{d}S$

$$\frac{1}{4\pi r^2} n'\langle v_{\mathrm{ar}}\rangle \cos\vartheta \cos\vartheta' \,\mathrm{d}S \,\mathrm{d}S' \,\mathrm{d}t$$

kde n' je koncentrácia v objemovej jednotke v $\mathrm{d}S'$. Tento výraz môžeme tiež písať ako

$$\frac{1}{4\pi} n'\langle v_{\mathrm{ar}}\rangle \cos\vartheta \,\mathrm{d}\omega \,\mathrm{d}S \,\mathrm{d}t$$

Položme teraz do osi trubice súradnú os x a jej smer zvoľme tak, aby plyn prúdil v smere narastania x. V tomto smere klesá počet molekúl v objemovej jednotke, a teda aj tlak plynu p. Predpokladajme, že tlak plynu je v ľubovoľnom priereze trubice rovnaký. To znamená, že závisí len od x. Táto závislosť sa vzťahuje aj na počet molekúl v objemovej jednotke. Preskúmame najprv závislosť n od x.

Zvoľme si niektorý plošný element steny trubice $\mathrm{d}S$ a preložme ním rovinu $x = 0$ (obr. 4.2). Nech je tento element dostatočne vzdialený od oboch koncov trubice, aby sme vylúčili vplyv jej okrajov. Vypočítajme úhrnný počet molekúl vyslaných elementom $\mathrm{d}S$ za čas $\mathrm{d}t$. Dostaneme ho integráciou výrazu

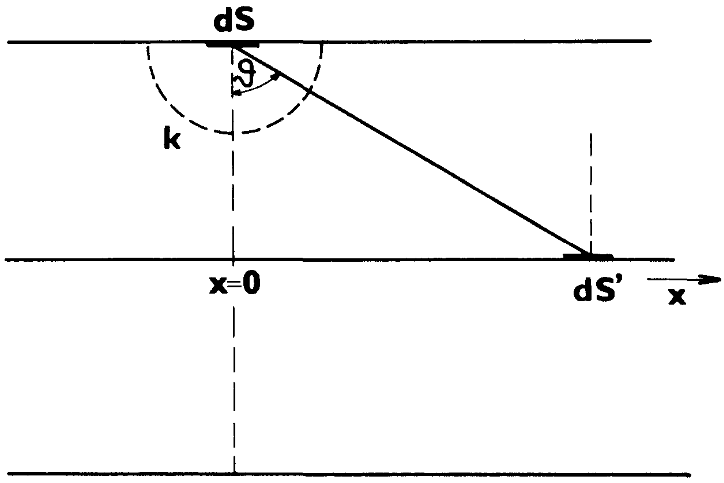
$$\frac{1}{4\pi} n\langle v_{\mathrm{a}}\rangle \cos\vartheta \,\mathrm{d}\omega \,\mathrm{d}S \,\mathrm{d}t$$

ktorý znamená počet molekúl v objemovej jednotke v mieste, kde je element $\mathrm{d}S$. Teraz však nahradíme koncentráciu n koncentráciou n_0, čo je počet molekúl v objemovej jednotke v rovine $x = 0$. Integrujeme cez polguľu opísanú okolo elementu $\mathrm{d}S$ s polomerom $r = 1$ a označíme ju K. Hľadaný počet molekúl, ktoré vysiela element $\mathrm{d}S$ za čas $\mathrm{d}t$ je

$$\frac{1}{4\pi} n_0\langle v_{\mathrm{ar}}\rangle \,\mathrm{d}S \,\mathrm{d}t \int_K \cos\vartheta \,\mathrm{d}\omega$$

Ak predpokladáme ustálený stav v trubici, potom tento výraz musí sa rovnať výrazu pre počet molekúl, ktoré dopadnú na $\mathrm{d}S$ za čas $\mathrm{d}t$. Tieto molekuly sú však vyslané rôznymi miestami steny trubice. Integráciou cez tú istú plochu K z počtu molekúl v objemovej jednotke v ľubovoľnom elemente $\mathrm{d}S'$ dostaneme počet molekúl, ktoré za čas $\mathrm{d}t$ dopadnú na $\mathrm{d}S$. Počet molekúl v objemovej jednotke v $\mathrm{d}S'$ je

$$\frac{1}{4\pi} n'\langle v_{\mathrm{ar}}\rangle \cos\vartheta \,\mathrm{d}\omega \,\mathrm{d}S \,\mathrm{d}t$$



Obr. 4.2 Geometrické zobrazenie vzájomných plôšok dS a dS' pri molekulárnom prúdení plynu v trubici v smere rastúceho x

kde $n' = n(x)$, a tak je

$$\frac{1}{4\pi}\langle v_{\mathrm{ar}}\rangle \,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t\int_K n(x)\cos\vartheta\,\mathrm{d}\omega$$

Integrácia v tomto prípade sa týka aj $n(x)$, pretože táto hodnota sa mení s polohou dS'. Pretože počet molekúl dopadajúcich sa musí rovnať počtu molekúl vyletujúcich z elementu dS za čas dt v rovnovážnom stave, preto platí rovnosť

$$\frac{1}{4\pi}\langle v_{\mathrm{a}}\rangle \,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t\int_K n_0\cos\vartheta\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{4\pi}\langle v_{\mathrm{a}}\rangle \,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t\int_K n(x)\cos\vartheta\,\mathrm{d}\omega$$

čiže

$$\int_K [n(x) - n_0]\cos\vartheta\,\mathrm{d}\omega = 0$$

Niektoré riešenia uvedenej rovnice sú:

a) Najjednoduchšie riešenie je

$$n(x) = n_0$$

Toto riešenie zodpovedá rovnovážnemu stavu plynu, keď hustota plynu je v celej trubici rovnaká – konštantná.

b) Ďalšie riešenie je

$$n(x) = n_0 - Cx$$

kde C je konštanta. Dosadením do uvedenej rovnice dostaneme

$$-C\int_K x\cos\vartheta\,\mathrm{d}\omega = 0$$

Ak teda riešenie b) vyhovuje uvedenej rovnici, treba dokázať uvedenú rovnosť.

Priestorový uhol môžeme prepísať pomocou priestorových uhlov ϑ a φ teda

$$\mathrm{d}\omega = \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$

Na základe tohto môžeme písať

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} x\sin\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = 0$$

Súradnica x je funkciou ϑ a φ. Vo valcovej trubici zodpovedajú pri zadanom uhle ϑ uhlom φ a $(2\pi - \varphi)$ hodnoty x, ktoré sa líšia len znamienkom, a tak výsledok integrácie už len podľa φ sa rovná nule a je tak ukázané, že riešením uvedenej rovnice je

$$n(x) = n_0 - Cx$$

Môžu existovať aj ďalšie riešenia. Predpokladajme však, že n je lineárnou funkciou x. Zo stavovej rovnice ideálneho plynu plynie

$$p = \frac{RT}{V} = \frac{RT}{M} m\,n$$

ak uvážime, že

$$V = \frac{M}{\rho} = \frac{M}{m\,n}$$

Dosadením za n dostaneme, že aj tlak plynu p je len lineárnou funkciou x

$$p = \frac{RT}{M} m(n_0 - Cx)$$

Potom gradient tlaku v celej trubici je rovnaký a rovná sa

$$-\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} = \frac{RT}{M} mC$$

Nech na koncoch trubice sú tlaky plynov p_1 a p_2, pričom p_2 je menší ako p_1. Potom máme

$$-\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} = \frac{p_2 - p_1}{L}$$

kde L je dĺžka trubice. Porovnaním s predchádzajúcim výrazom dostaneme pre konštantu C výraz

$$C = \frac{M}{mRT} \frac{p_2 - p_1}{L}$$

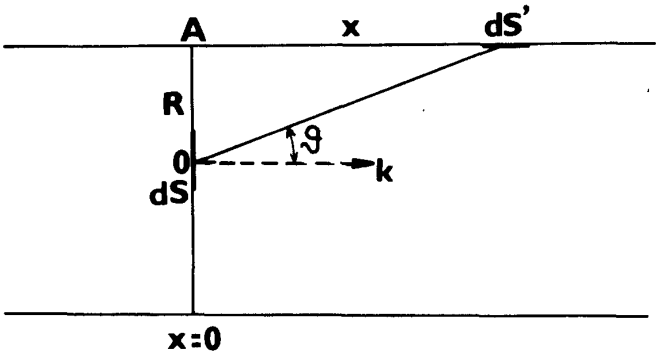
Vypočítajme teraz množstvo plynu, ktoré prechádza trubicou za čas $\mathrm{d}t$. Zvoľme si v tomto prípade $\mathrm{d}S$ ako plošný element ľubovoľného prierezu trubice, napr. $x = 0$. Molekuly prechádzajúce plochou $\mathrm{d}S$ sú vyslané stenou trubice. Úhrnný počet molekúl, ktorý prejde plôškou $\mathrm{d}S$ je daný rozdielom počtu molekúl v smere x a proti smeru x.

Počet molekúl, ktoré prejdú cez plochu $\mathrm{d}S$ za čas $\mathrm{d}t$ a sú vyslané z plôšky $\mathrm{d}S'$ steny trubice, ktorá leží na strane kladných hodnôt x, je

$$\frac{1}{4\pi} \langle v_\mathrm{a} \rangle \,\mathrm{d}\,S\,\mathrm{d}\,t \int_K n(x) \cos\vartheta \,\mathrm{d}\,\omega$$

alebo po zavedení sférických súradníc

$$\frac{1}{4\pi} \langle v_\mathrm{a} \rangle \,\mathrm{d}\,S\,\mathrm{d}\,t \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} n(x) \sin\vartheta \cos\vartheta \,\mathrm{d}\,\vartheta\,\mathrm{d}\,\varphi$$



Obr. 4.3 Geometrické zobrazenie vzájomných plošiek dS a dS' pri odvodení vodivosti dlhých trubiek v molekulárnom režime prúdenia plynu

Pokladajme trubicu za veľmi dlhú a pokúsme sa vyjadriť $n(x)$. Z obr. 4.3 plynie: $x = R\cot\mathrm{g}\,\vartheta$. Vzdialenosť $R = \overline{OA}$ závisí len od uhla φ a nie od uhla ϑ, pretože trubica je valcová, a tak teda platí

$$n(x) = n_0 - CR \operatorname{cotg} \vartheta$$

Po dosadení dostaneme

$$\frac{1}{4\pi}\langle v_\mathrm{a}\rangle \,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} n_0 \sin\vartheta \cos\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi - \frac{C}{4\pi}\langle v_\mathrm{a}\rangle \,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} R \sin\vartheta \cos\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$

Hodnota prvého integrálu je

$$\frac{1}{2}\langle v_\mathrm{a}\rangle \,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t\, n_0 \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \cos\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{4}\langle v_\mathrm{a}\rangle n_0 \,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$$

Druhý integrál môžeme integrovať len podľa ϑ, čiže

$$\frac{C}{4\pi}\langle v_\mathrm{a}\rangle \,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{16} C\langle v_\mathrm{a}\rangle \,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\varphi$$

Potom počet molekúl zo strany narastajúcich hodnôt x je

$$\frac{1}{4} n_0 \langle v_\mathrm{a}\rangle \,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t - \frac{1}{16} C\langle v_\mathrm{a}\rangle \,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\varphi$$

Úplne analogicky dostaneme pre počet molekúl prúdiacich z opačnej strany, zo strany záporných hodnôt x

$$\frac{1}{4} n_0 \langle v_\mathrm{a}\rangle \,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t + \frac{1}{16} C\langle v_\mathrm{a}\rangle \,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\varphi$$

Takže rozdiel je

$$\frac{1}{8} C\langle v_\mathrm{a}\rangle \,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\varphi$$

Ak tento výraz vynásobíme hmotnosťou jednej molekuly m a predelíme časom $\mathrm{d}t$ dostaneme hmotnosť plynu, ktorá prešla plôškou $\mathrm{d}S$ za jednotku času, t. j.

$$\frac{1}{8} C\langle v_\mathrm{a}\rangle m \,\mathrm{d}S \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\varphi$$

Integráciou cez celú plochu prierezu trubice Σ dostaneme pre hmotnosť plynu, ktorá prešla prierezom trubice za jednotku času ako

$$\frac{1}{8} mC\langle v_\mathrm{a}\rangle K$$

kde

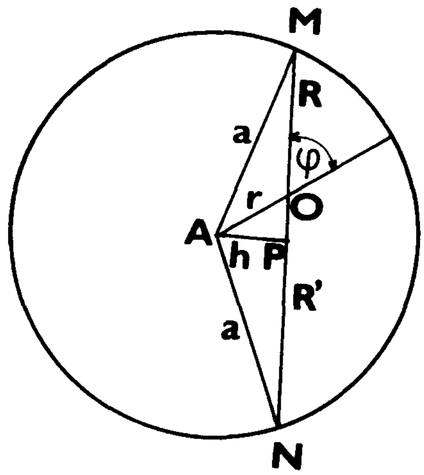
$$K = \int_{(\Sigma)} \mathrm{d}S \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\varphi$$

Ak dosadíme za strednú aritmetickú rýchlosť $\langle v_\mathrm{a}\rangle$ z Maxwellovského rozdelenia a za konštantu C vypočítanú hodnotu dostaneme

$$G = \frac{1}{8} m \frac{M}{mRT} \frac{p_2 - p_1}{L} 2\sqrt{\frac{2RT}{\pi M}} K = \frac{1}{2} K \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} \frac{p_2 - p_1}{L}$$

Hodnota integrálu K závisí od tvaru a rozmerov prierezu trubice. Vypočítame ho pre kruhový prierez s polomerom a. Z obr. 4.4 vyplýva, že

$$\int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} R'\,\mathrm{d}\varphi$$



Obr. 4.4 Zobrazenie prierezu trubice a premenných parametrov pre výpočet integrálu cez prierez

pretože $\overline{OM} = R$ a $\overline{ON} = R'$ nadobúdajú v integračnom intervale rovnaké hodnoty. Môžeme taktiež písať

$$\int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (R + R')\,\mathrm{d}\varphi$$

Z rovnoramenného trojuholníka AMN a z pravouhlého trojuholníka AMP plynie

$$R + R' = 2\sqrt{a^2 - h^2} = 2\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2\varphi}$$

kde $r = \overline{AO}$ je vzdialenosť elementu dS od stredu prierezu. Máme teda

$$\int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

a tak pre hodnotu integrálu K platí

$$K = 4\int_{(\Sigma)} \mathrm{d}S \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

Integrál podľa φ je funkciou r, preto pri integrácii cez plochu Σ môžeme za element dS voliť medzikružie s polomermi r a r + dr a vtedy je d$S = 2\pi r\,\mathrm{d}r$, z čoho

$$K = 8\pi\int_0^{a} r\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

Zameňme poradie integrácie

$$K = 8\pi\int_a^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2\varphi}\, r\,\mathrm{d}r$$

Vypočítame najprv integrál podľa r t. j.

$$\int_0^{a} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2\varphi}\, r\,\mathrm{d}r = \left[-\frac{(a^2 - r^2\sin^2\varphi)^{3/2}}{3\sin^2\varphi}\right]_0^a = a^3\,\frac{1-\cos^3\varphi}{3\sin^2\varphi}$$

takže

$$K = \frac{8}{3}\pi a^3 \int_a^{\pi/2} \frac{1-\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

Avšak

$$\frac{1-\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + \cos\varphi = \frac{1}{2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}} + \cos\varphi$$