Úvod do paralelného programovania

Autor: Damas Gruska
Názov: Úvod do paralelného programovania
Podnázov: Učebný text k prednáške „ Úvod do paralelného programovania" založený na knihe K. M. Chandy, J. Misra: *Parallel Program Design*. Addison-Wesley, 1988 a literatúre venovanej modálnym a temporálnym logikám
Recenzent: doc. PhDr. Ján Šefránek, CSc.
Vydavateľ: Knižničné a edičné centrum FMFI UK
Grafická úprava: Damas Gruska
Rok vydania:2008
Miesto vydania: Bratislava
Vydanie: prvé
ISBN 978-80-89186-43-3
Počet strán (číslované): 213
Náklad/internetová adresa:http://ii.fmph.uniba.sk/~gruska/udpp/udpp.pdf

Úvod do paralelného programovania

- **Cieľ kurzu:**

  naučiť systémový návrh riešenia úloh paralelného programovania pre rôzne typy architektúr a pomocou logického kalkulu naučiť dokázať správnosť týchto riešení

- **Plán kurzu (14 prednášok):**

  1.-3. syntax jazyka UNITY, špecifikačná logika, typy architektúr

  4. – 10. riešenie konkrétnych úloh paralelného programovania z rôznych oblastí (operačné systémy, fault tolerant systémy, protokoly ...)

  11.-14. iné paralelné jazyky, iné špecifikačné logiky

- **Literatúra:**

  K. M. Chandy, J. Misra: *Parallel Program Design*. Addison-Wesley 1988

  C. Stirling: Modal and Temporal Properties of Processes, Springer 2001

Obsah

- Úvod
- UNITY – syntax, sémantika, logika
- Architektúry a jednoduché príklady
- Najkratšia cesta
- Readers–Writers Problem
- Večerajúci filozofi
- Koordinácia schôdzí
- Pijúci filozofi
- Triedenie
- Faulty channels
- Global snapshots
- Detekovanie stabilných vlastností
- Byzantská dohoda
- Temporálne logiky

Úvod

- **História:**
  - 50-te roky: sekvenčné programy boli šité na mieru pre daný hardvér (inštrukcie procesora, veľkosť pamäte, spôsob adresovania atď.)
  - Cestou na prekonanie tejto nevýhody boli jazyky vyššej úrovne (Fortran, Algol, Pascal, C, C++, Java, ...)
  - paralelné programy dnes pripomínajú sekvenčné programy z 50-tych rokov – programátor musí vedieť typ architektúry (synchrónna, asynchrónna, distribuovaná), počet procesorov atď. Neexistuje „univerzálny" paralelný programovací jazyk typu C, Java.
- **Riešenie v dvoch krokoch:**
  - abstraktné riešenie (nezávislé na architektúre)
  - efektívne „zjemnenie" pre konkrétnu paralelnú architektúru

Základné črty teórie, ktorú budeme používať:

- **Nedeterminizmus** (je to jednoduchšie s ním a postupným zjemnením môze byt odstránený); niektoré systémy sú zo svojej povahy nedeterministické, napr. OS
- **absencia „control flow"**
- **synchrónnosť** a **asynchrónnosť**
- **stavy** a **priradenia** (prechodové systémy)
- **kód programu** nie je prepletený s dôkazom
- **správnosť** (závisí len od programu) a **zložitosť** (závisí od programu a jeho implementácie na konkrétnej architektúre) **sú oddelené**

UNITY

Unbounded **N**ondeterministic **I**terative **T**ransformations

- **Programy:**
  - deklarácie premenných
  - špecifikácia počiatočných hodnôt
  - množina priradení
- **Vykonanie:**
  - začína zo stavu vyhovujúceho vstupnej (počiatočnej) podmienke
  - program sa vykonáva donekonečna
  - v každom kroku sa nedeterministicky vyberie priraďovací príkaz a ten sa vykoná
  - každý príkaz sa vyberie nekonečne veľa krát
- **Nešpecifikuje sa:**
  - kedy sa príkaz vykoná
  - kde sa vykoná

UNITY

- Programy sa ďalej alokujú na konkrétne architektúry, kde sa už špecifikuje viac
- Stav sa volá *pevný bod*, ak vykonaním ľubovoľného príkazu program prejde do toho istého stavu
- predikát FP charakterizuje pevný bod
- *stabilný predikát* je taký, ktorý keď raz platí, platí potom už stále
- (**Pozor:** angl. *eventually* znamená určite niekedy/raz iste)
- (FP je stabilný)

Príklad: Určenie termínu schôdzky

- Úloha: určiť najbližší vyhovujúci čas (pre 3 osoby), kedy sa môžu stretnúť
- F má voľný len každý pondelok, tak vždy povie dátum najbližšieho pondelka; *f*, *g*, *h* sú funkcie zodpovedajúce osobám F, G, H („čo povedia“)
- com(t) ≡ { $t = f(t) = g(t) = h(t)$ } (boolovská funkcia)
- Špecifikácia: dané sú monotónne neklesajúce číselné fukcie *f*, *g*, *h* také, že pre každé t platí:
  - $f(t) \geq t \wedge g(t) \geq t \wedge h(t) \geq t$
  - $f(f(t)) = f(t) \wedge g(g(t)) = g(t) \wedge h(h(t)) = h(t)$
  - existuje *z* také, že com(*z*) platí

- Treba nájsť program, ktorý má nasledujúci stabilný predikát:
  - $r = \min\{ t \mid \mathrm{com}(t) \}$
- Rôzne stratégie:
  - F, G, H sedia za okrúhlym stolom a posielajú si lístočky s najbližším vyhovujúcim časom; keď lístok obehne dookola bez zmeny, tak je to dohodnuté
  - ústredný koordinátor: každý mu pošle svoj návrh, ten naspäť pošle všetkým maximum; opakuje sa to, až koordinátor nedostane naspäť to isté, čo poslal
  - aukcia (kto dá viac), prekrikovanie

UNITY riešenia 1

- Program P1

  assign $r := \min\{ u \mid 0 \leq u \leq z \wedge \mathrm{com}(u)\}$

  end{P1}
- na sekvenčnej architektúre: zložitosť $O(z)$
- keď má z procesorov: $O(\log z)$ krokov
- nevýhoda: zbytočne testuje hodnoty, napríklad u také, že $t < u < f(t)$

UNITY riešenia 2

- Program P2

  initially $r = 0$

  assign $r := f(r) \square r := g(r) \square r := h(r)$

  end {P2}

Dôkaz správnosti:

- 1: invariant $(0 \leq r) \wedge \forall u(0 \leq u \leq z \Rightarrow \neg \mathrm{com}(u))$

  (z toho vieme, že $r \leq z$)

  ukážeme, že na začiatku je true a že vykonanie hociktorého príkazu ho zachováva
- 2: FP $\equiv$ $r = f(r) \wedge r = g(r) \wedge r = h(r)$ t.j. FP $\equiv$ $\mathrm{com}(r)$

Pokračovanie dôkazu

- z 1 a 2 vyplýva, že ak program dosiahne pevný bod, tak tento je najskorším časom stretnutia
- Treba ešte ukázať, že každé vykonanie programu vedie k pevnému bodu
- 3: Ukážeme, že ak $\neg$FP $\wedge$ r = K v nejakom bode výpočtu, tak neskôr bude platiť r > K
  - z 1 vieme, že r nemôže stúpať cez z, teda raz (angl. *eventually*) určite bude musieť FP platiť
  - z 2 máme $\neg$FP $\wedge$ r = K $\equiv$ K < f(K) $\vee$ K < g(K) $\vee$ K < h(K);
  - nech K < f(K); ale raz sa r := f(r) musí vykonať a tak sa r zvýši

UNITY riešenia 3

- Riešenie s „centrálnym koordinátorom“:
- Program P3

  initially $r = 0$

  assign $r := \min\{ f(r), g(r), h(r) \}$

  end{P3}

- *Alokovanie na von Neumannovskom počítači*
- opakovať sekvenciu $r := f(r)$; $r := g(r)$; $r := h(r)$ až kým sa nedosiahne pevný bod, teda príkaz $r := h(g(f(r)))$
- môže byť výhodnejšie častejšie aplikovať f než g, h

  $r := f(r)$; $r := g(r)$; $r := f(r)$; $r := h(r)$

  $r := h(f(g(f(r))))$
- P2 možno alokovať na počítač s 3 procesormi, každý pre jednu osobu
- správnosť týchto prístupov aj programu P3 plynie z dôkazu správnosti pre P2

UNITY Program Structure

- Program program_name
  declare declare_section
  always always_section
  initially initially_section
  assign assign_section
  end

- **program_name:** string of text
  (ak je telo sekcie prázdne, môžeme zodpovedajúce kľúčové slovo vynechať)
- **declate_section:** PASCAL like (int, boolean, array, set…)
- **always_section:** definuje niektoré premenné ako funkcie iných; podmienky, ktoré vždy platia (invarianty)
- **initially_section:** definujú počiatočné hodnoty premenných; neinicializované majú ľubovoľnú hodnotu
- **assign_section:** obsahuje množinu priraďovacích príkazov

UNITY Program Structure 2

- Vykonávanie programu začína v stave, keď premenné majú hodnoty priradené v initially_section
- V každom kroku jeden príkaz je vykonaný v náhodnom poradí
- Počas nekonečného výpočtu každý príkaz je vykonaný nekonečne veľa krát
- Stav programu sa volá *FIXED POINT*, ak vykonanie ktoréhokoľvek príkazu tento stav nezmení
- Programy nemajú vstupno-výstupné príkazy

UNITY Program Structure 3

- Assignment Statement
  - $x, y, z := 0, 1, 2$
  - $x, y := 0, 1 \;||\; z := 2$
  - $\langle || \; j : 0 \le j \le N :: A[j] := B[j] \rangle$ znamená A[0] := B[0] || … || A[N] := B[N]
  - $x := -1$ if $y < 0 \sim 0$ if $y = 0 \sim 1$ if $y > 0$
- Structure of Assignment Statement (assign_stat)

  assign_stat → assign_comp { || assign_comp }
- Assignment component (assign_comp)

  assign_comp → enum_assign | quantif_assign
- premenná sa môže vyskytnúť aj viac ráz na ľavej strane, je však zodpovednosťou programátora, že všetky hodnoty, ktoré sú jej priradené, sú identické
- každá assignment-component je vykonávaná nezávisle a simultánne
- || (dve čiary): súčasné (synchrónne) vykonanie
- {...}: nula alebo viac krát

UNITY Program Structure 4

- Enumerated assignment (enum_assign)
  enum_assign → variable_list := expr_list
  variable_list → variable { , variable }
  expr_list → simple_expr_list | conditional_expr_list
  simple_expr_list → expr { , expr }
  conditional_expr_list → simple_expr_list if bool_expr
  { ~ simple_expr_list if bool_expr }
- Expression (expr), Boolean expression (bool_expr): PASCAL like
- hodnoty všetkých expr na pravej strane a indexov na ľavej strane sú vyhodnotené a potom priradené premenným na ľavej strane
- Conditional_expr: ak ich je viac true, tak zodpovedajúce simple_expr_list musia mať rovnakú hodnotu – musí to byť DETERMINISTICKÉ
- Príklady:
  - vymenenie obsahu x, y:
    $x, y := y, x$
  - absolútna hodnota y je x:
    $x := y$ if $y \geq 0$ ~ $-y$ if $y \leq 0$
  - $sum, j := sum + A[j], j + 1$ if $j < N$

UNITY Program Structure 5

- Quantified assignment (quant_assign)

  quant_assign → ⟨ || quant assign_stat ⟩
- Quantification (quant)

  quant → variable_list: bool_expr ::
- premenné z variable_list sa nazývajú *viazané*
- rozsah quant je daný zátvorkami ⟨ ⟩
- "prípad vyhovujúci quant" je množina hodnôt viazaných premenných pre ktoré platí bool_expr
- quant_assign znamená nula alebo viac assign_comp získaných (z assign_stat) nahradením viazaných premenných ich „prípadmi", „prípadov" musí byť konečne veľa
- Príklady
  - A[0..N], B[0..N] of int, treba priradiť max(A[j], B[j]) do A[j] - ⟨ || j: $0 \le j \le N$ :: A[j] := max(A[j], B[j]) ⟩
  - Priradenie jednotkovej matice do U[0..N, 0..N]

    ⟨ || j, k: $0 \le j \le N \wedge 0 \le k \le N$ :: U[j, k] := 0 if $j \neq k$ ~ 1 if $j = k$ ⟩

    ⟨ || j, k: $0 \le j \le N \wedge 0 \le k \le N \wedge j \neq k$ :: U[j, k] := 0 ⟩ || ⟨ || j: $0 \le j \le N$ :: U[j, j] := 1 ⟩

    ⟨ || j: $0 \le j \le N$ :: U[j, j] := 1 || ⟨ || k: $0 \le k \le N \wedge j \neq k$ :: U[j, k] := 0 ⟩⟩

UNITY Program Structure 6: Assign section

assign_section → statement_list

statement_list → statement { □ statement }

statement → assign_stat | quantified_statement_list

quantified_statement_list → ⟨ □ quant statement_list⟩

- □ (obdĺžniček): separátor medzi statements, ich počet musí byť konečný
- *Obmedzenie:* bool_expr v quant nesmie obsahovať premenné, ktorých hodnota sa môže zmeniť počas behu programu
- Toto obmedzenie zaručuje, že množina statements je pevná – statements sa netvoria počas výpočtu
- Príklady: Priradenie jednotkovej matice do U[0..N, 0..N]
  - $(N + 1)^2$ statements:

    $\langle \Box\ j, k: 0 \le j \le N \wedge 0 \le k \le N :: U[j, k] := 0 \text{ if } j \ne k \sim 1 \text{ if } j = k \rangle$
  - 2 statements:

    $\langle \,||\, j, k: 0 \le j \le N \wedge 0 \le k \le N \wedge j \ne k :: U[j, k] := 0 \rangle \prod \langle \,||\, j: 0 \le j \le N :: U[j, j] := 1 \rangle$
  - N + 1 statement_lists, každý z nich má 2 statements

    $\langle \Box\ j: 0 \le j \le N :: U[j, j] := 1 \Box \langle \,||\, k: 0 \le k \le N \wedge j \ne k :: U[j, k] := 0 \rangle\rangle$

UNITY Program Structure 7: Initially section

- syntax rovnaká ako assign_section, namiesto symbolu := sa používa =
- definuje iniciálne hodnoty premenných
- premenné sa vyskytujú na ľavej strane najviac raz
- existuje usporiadanie rovností také, že každá *premenná v kvantifikácii* je buď viazaná alebo sa nachádza na ľavej strane nejakej predchádzajúcej rovnosti
- existuje usporiadanie za quantified equations, že *každá premenná na pravej strane alebo v indexe* sa nachádza na ľavej strane nejakej predchádzajúcej rovnosti
- tieto dve podmienky hovoria, že iniciálne hodnoty sú dobre definované
- initially_section definuje *inicial condition*; je to najsilnejší predikát, ktorý platí na začiatku
- získa sa nahradením a || za $\wedge$ a podmienené výrazy tvaru

  $x = e_0$ if $b_0 \sim \ldots \sim e_n$ if b_n výrazom

  $(b_0 \Rightarrow (x = e_0)) \wedge \ldots \wedge (b_n \Rightarrow (x = e_n))$
- Čo *nie je* ekvivalentné s $((x = e_0) \wedge b_0) \vee \ldots \vee ((x = e_n) \wedge b_n)$
  - napr. $y = 2$ if false

UNITY Program Structure 8: Initially section, príklady

- nemožno zameniť ▯ na ||, v takom prípade by neexistovalo usporiadanie príkazov také, že N je iniciované pred jeho použitím
  - initially N = 3 ▯ ⟨ || k: $0 \le k < N$ :: A[N − k] = k ⟩
- preloženie počiatočnej podmieky pre

  ⟨ ▯ j, k: $0 \le j \le N \wedge 0 \le k \le N$ :: U[j, k] = 0 if $j \neq k$ ~ 1 if $j = k$ ⟩
- vyzerá nasledovne:

  ⟨$\wedge$ j, k : $0 \le j \le N \wedge 0 \le k \le N$ :: ($j \neq k \Rightarrow$ U[j, k] = 0) $\wedge$ ($j = k \Rightarrow$ U[j, k] = 1) ⟩
- Príklad:
- Program P3

  declare r: int

  initially r = 0

  assign ⟨ ▯ j: $0 \le j \le N$ :: $r := j \times f(r)$ ⟩

  end{P3}

Sorting 1

- Program sort1

  assign

  $\langle \Box\, j : 0 \le j \le N ::$

  $A[j], A[j+1] := A[j+1], A[j]$ if $A[j] > A[j+1] \rangle$

  end{sort1}

- Program sort2

  assign

  $\langle \Box\, j : 0 \le j \le N \wedge \text{even}(j) ::$

  $A[j], A[j+1] := A[j+1], A[j]$ if $A[j] > A[j+1] \rangle$

  $\Box \langle \Box\, j : 0 \le j \le N \wedge \text{odd}(j) ::$

  $A[j], A[j+1] := A[j+1], A[j]$ if $A[j] > A[j+1] \rangle$

  end{sort2}

Sorting 2

- Program sort3
  assign
    ⟨ □ k: $0 \leq k \leq 1$ ::
      ⟨ || j: $0 \leq j \leq \mathrm{N} \wedge (k = j \bmod 2)$ ::
      A[j], A[$j + 1$] := A[$j + 1$], A[j] if A[j] > A[$j + 1$] ⟩⟩
  end{sort3}

Binomial Coefficients

- C(n, k) značí „n nad k“
- C(n, 0) = C(n, n) = 1, C(n, k) = C(n – 1, k – 1) + C(n – 1, k)
- Program binomial

  assign

  ⟨ ▯ n: 0 ≤ n < N ::

  $c[n, 0] := 1$

  || $c[n, n] := 1$

  ▯ ⟨ || k: 0 < k < n ::

  $c[n, k] := c[n–1, k–1] + c[n–1, k]$ ⟩⟩

  end{binomial}
- poradie je ľubovoľné: $c[n, k]$ môže byť priradená hodnota, hoci $c[n–1, k–1]$ alebo $c[n–1, k]$ nie je ešte vypočítané
- tu možno hocktoré || nahradiť symbolom ▯
- pre n = 0 je $c[0, 0]$ dvakrát na ľavej strane, ale vždy je mu priradená rovnaká hodnota

UNITY Program Structure 9: Always section

- syntax rovnaká ako v initially_section
- premenná na ľavej strane sa nazýva *transparentná*, ak je funkciou netransparentných a nie je na ľavej strane inicializácií alebo priradení
- rovnaké obmedzenia ako v initially_section
- Príklad:
  - *ne* – počet zamestnancov
  - *nm*, *nf* – počet mužov, žien
  - always *ne* = *nm* + *nf*
- always_section nie je nevyhnutná, ale
  - invarianty
  - transparentné premenné možno chápať ako „makro-inštrukcie“
  - efektívna implementácia – vyhodnotenie TV môže byť odložené kým treba alebo kým sa nezmení hodnota premennej ktorú definuje

UNITY Program Structure 10

- Quantified Expression

  expr → ⟨ op quant expr ⟩

  op → min | max | + | × | ∧ | ∨ | ≡ | ...
- ak neexistuje „prípad", potom expr (naľavo) má hodnotu neutrálneho prvku operátora op
- *neutrálne prvky*:

min	max	+	×	∧	∨	≡
∞	−∞	0	1	true	false	true

- Príklady
  1. ⟨ ∨ j: 0 ≤ j ≤ N :: $b[j]$ ⟩
     true, ak nejaké $b[j]$ je true
  2. ⟨ min j: 0 ≤ j ≤ N :: A[j] ⟩
     najmenší prvok poľa A[0..N]
  3. ⟨ + j: 0 ≤ j ≤ N ∧ A[j] < A[k] :: 1 ⟩
     počet prvkov menších ako A[k], ak A[k] je v A[0..N]

Programming Logic

- {*p*} s {*q*} ak platí p a s skončí tak bude platiť q
- *p*: precondition, *q*: postcondition, s: statement
- predikáty nie sú viazané s nejakými miestami v programe, ako u sekvenčných programov
- logika pre uvažovanie o nekonečných postupnostiach programových stavov
- tvrdenie {true} *t* {*p*} (pre príkaz *t* programu F) hovorí, že niekedy raz (*eventually*) *p* bude platiť
- vlastnosti programov:
  - Safety („nič zlé sa nestane“)
  - Progress („niečo dobré sa stane“)
- budeme predpokladať, že program má aspoň jeden príkaz
- viacero výrokov v hypotéze znamená konjukciu
- viacero výrokov v závere znamená disjukciu

Basic Concepts

- (hypotéza / záver)
  - $\{p\}\ s\ \{\text{true}\}$
  - $\{\text{false}\}\ s\ \{q\}$
  - $\{p\}\ s\ \{\text{false}\}\ /\ \neg p$
  - $\{p\}\ s\ \{q\},\ \{p'\}\ s\ \{q'\}\ /\ \{p \vee p'\}\ s\ \{q \vee q'\}$
  - $\{p\}\ s\ \{q\},\ \{p'\}\ s\ \{q'\}\ /\ \{p \vee p'\}\ s\ \{q \vee q'\}$
  - $p' \Rightarrow p,\ \{p\}\ s\ \{q\},\ q \Rightarrow q'\ /\ \{p'\}\ s\ \{q'\}$

Dokazovanie tvrdení o priraďovacích príkazoch

- $\{p\}\ x := E\ \{q\}$
  1. V q nahradíme za x výraz E (označenie q^x_E)

  Príklad: $\{x<2\}\ x:= x+3\ \{x<10\}$; $q^x_E = x+3 < 10$

  2. Ukážeme, že $p \Rightarrow q^x_E$
- ak $E = e_0$ if $b_0 \sim \ldots \sim e_n$ if b_n tak výraz q^x_E bude takýto:
  $(b_0 \Rightarrow q^x_{e0}) \wedge \ldots \wedge (b_n \Rightarrow q^x_{en})) \wedge ((\neg b_0 \wedge \ldots \wedge \neg b_n) \Rightarrow q)$
- môže sa písať aj v tvare

  $\{p \wedge b_0\}\ x := e_0\ \{q\}$

  …

  $\{p \wedge b_n\}\ x := e_n\ \{q\}$

  $\{p \wedge (\neg b_0 \wedge \ldots \wedge \neg b_n) \Rightarrow q\}$
- Poznámka.
  - Znak $\Rightarrow$ budeme používať ako označenie logickej implikácie.
  - Znak $\equiv$ označuje jednak logickú ekvivalenciu, jednak syntaktickú ekvivalenciu. Význam je zrejmý z kontextu.

Kvantifikované tvrdenia

- Majme program F (ktorý obsahuje aspoň jeden príkaz)

Budem uvažovať dva typy tvrdení:

1. $\langle\ \forall s$: s *in* F :: $\{p\}\ s\ \{q\}\ \rangle$
2. $\langle\ \exists s$: s *in* F :: $\{p\}\ s\ \{q\}\ \rangle$

- Príklad: nech F $\equiv \langle\ \Box\ j$: $b(j)$ :: $t(j)\ \rangle$

  pre 1. treba ukázať, že $\{p \wedge b(j)\}\ t(j)\ \{q\}$

  pre 2. treba ukázať, že existuje j také, že $b(j)$ platí a súčasne $\{p \wedge b(j)\}\ t(j)\ \{q\}$

Kvantifikované tvrdenia - príklady

- Príklady ($\forall s$, $\exists s$ znamená pre každý príkaz a existuje príkaz v programe *F)*
  1. Hodnota *x* neklesá: univerzálne kvantifikované cez všetky číselné hodnoty *k*

     $\langle\ \forall s :: \{x = k\}\ s\ \{x \geq k\}\ \rangle$
  2. Správa ostáva v kanáli až kým nie je prijatá
     - inch = in channel (v kanáli)
     - rcvd = received (prijatá)

     $\langle\ \forall s :: \{\text{inch}\}\ s\ \{\text{inch} \vee \text{rcvd}\}\ \rangle$
  3. Ako 2 ale prijaté správy sú odstránené z kanálu

     $\langle\ \forall s :: \{\text{inch} \wedge \neg\text{rcvd}\}\ s\ \{(\text{inch} \wedge \neg\text{rcvd}) \vee (\neg\text{inch} \wedge \text{rcvd})\}\ \rangle$
  4. Hodnota *x* je neklesajúca a stúpne

     $\langle\ \forall s :: \{x = k\}\ s\ \{x \geq k\}\ \rangle$

     $\langle\ \exists s :: \{x = k\}\ s\ \{x > k\}\ \rangle$

Výpočtový model

- množina výpočtových postupností priradená ku každému programu
- nekonečné postupnosti, každá reprezentuje jeden možný beh (výpočet) programu
- R_j = j-ty prvok postupnosti R, $j \geq 0$
- R_j = (R_j.state, R_j.label)
  state (stav) – hodnota všetkých premenných
  label – príkaz vykonaný v j-tom kroku

Výpočtový model

- R_0.state – iniciačný stav (ak nie sú dané iniciačné hodnoty pre všetky premenné, nemusia byť rovnaké pre rôzne R)
- $R_{j+!}$.state je jednoznačne určený R_j.state a R_j.label-om, teda R_0.state a { R_k.label | $0 \leq k < j$ } určujú R_j.state
- Spravodlivý výber príkazov: $\forall R \forall s$, R_j.label = s pre nekonečne veľa j
- $p[R_j] = p$ platí v stave R_j.state
- $\{p\}$ s $\{q\}$ znamená

  $\forall R \forall j$: $(p[R_j] \wedge R_j.\text{label} = s) \Rightarrow q[R_{j+!}]$

Základné pojmy

- unless (a špeciálne prípady stable a invariant)
- ensures
- leads-to (označenie $\rightarrow$)

- **Safety:** *p* unless *q*, *p* is stable, *p* is invariant
- **Progress:** *p* ensures *q*, *p* □ *q*

- používame univerzálnu kvantifikáciu; $x = k$ unless $x > k$ znamená $\langle\ \forall k :: x = k \text{ unless } x > k\ \rangle$

Unless

- (daný je program F)
- p unless $q \equiv \langle \forall s\text{: } s \textit{ in } \mathrm{F} :: \{p \wedge \neg q\}\ S\ \{p \vee q\} \rangle$
- ak p je true a q nie je true v nasledujúcom kroku, p ostáva true alebo q sa stane true
- ak v nejakom mieste výpočtu F platí p, tak
  - q nebude nikdy platiť a p bude stále platiť
  - q bude určite raz (*eventually*) platiť a p platí aspoň pokiaľ q začne platiť
- $(p \wedge \neg q)[R_j] \Rightarrow (p \vee q)[R_{j+!}]$
- Z "p unless q" možno odvodiť: $p[R_j] \Rightarrow$

  $\langle\ \forall k\text{: } k \geq j :: (p \wedge \neg q)[R_k]\ \rangle \vee$ ($p \wedge \neg q$ platí vždy)

  $[\ \langle\ \exists m\text{: } m \geq j :: q[R_m]\ \rangle \wedge$ (nakoniec platí)

  $\langle\ \forall k\text{: } j \leq k < m :: (p \wedge \neg q)[R_k]\ \rangle\ ]$ (dovtedy platí $p \wedge \neg q$)

Unless

- Príklady:

  1. x neklesne
     - $x = k$ unless $x > k$
     - $x \geq k$ unless $x > k$
     - $x \geq k$ unless false

  2. Správa je v kanáli až kým nie je prijatá a potom je odstránená z kanálu
     - inch $\wedge$ $\neg$rcvd unless $\neg$inch $\wedge$ rcvd

Špeciálne prípady unless (stable, invariant)

- p is stable $\equiv$ p unless false
- q is invariant $\equiv$ (initial condition $\Rightarrow$ q) $\wedge$ q is stable
- ak p is stable, tak ak sa raz stane true, potom ostane vždy true (t.j. $\{p\}$ s $\{p\}$ pre $\forall s$)
- invariant je vždy true

- **Pozorovanie:** Ak I, J sú stable (pre program F), potom aj I $\wedge$ J, I $\vee$ J sú stable. Podobne pre invarianty.
- **Označenie:** constant p: ak p aj $\neg p$ sú stable

Špeciálne prípady unless (stable, invariant)

- **Substitučná axióma:** Ak $x = y$ je invariant programu F, tak môžeme x zameniť za y vo všetkých vlastnostiach programu F.
- Ak I je invariant, je zameniteľný s true a vice versa.
- **Dôsledok:** p unless q, $\neg q$ is invariant $\Rightarrow$ p is stable.
- *Dôkaz:*

  $\neg q \equiv$ true /* substitučná axióma */

  p unless q /* predpoklad */

  p unless false /* z predchádzajúcich */

  p is stable /* z definície */
- Ak I je invariant, tak p môže byť zameniteľné s I $\wedge$ p alebo $\neg$I $\vee$ p a podobne.
- Dokázať, že p je stabilné: stačí ukázať, že I $\wedge$ p je stabilné, čo môže byť ľahšie, ako pre samotné p.

Ensures

- (daný je program F)
- p ensures $q \equiv p$ unless $q \wedge \langle \exists s: s \text{ in } \mathrm{F} :: \{p \wedge \neg q\}\ S\ \{q\} \rangle$
- Ak p je true v nejakom bode výpočtu, p ostane true, pokiaľ q je false (p unless q) a určite raz (*eventually*) sa stane q true („raz naň dôjde“) po vykonaní nejakého príkazu s
- Z „ p ensures q“ možno odvodiť:

$$p[R_j] \Rightarrow$$
$$\langle\ \exists m: m \geq j :: q[R_m]\ \rangle \wedge \quad \text{(niekedy platí)}$$
$$\langle\ \forall k: j \leq k < m :: (p \wedge \neg q)[R_k]\ \rangle \quad \text{(dovtedy platí } p \wedge \neg q \text{)}$$

Ensures - príklady

1. x je neklesajúca a raz stúpne
   - $x = k$ ensures $x > k$, teda
   - $\langle\ \forall k :: x = k$ unless $x > k\ \rangle$,
   - $\langle\ \forall k :: \langle\ \exists s :: \{x = k\}\ s\ \{x > k\}\ \rangle\rangle$

2. Program P: $x := 0$ if $x < 0$ $\square$ $x := 0$ if $x > 0$
   - "$x \neq 0$ ensures $x = 0$" nie je vlastnosť tohto programu, lebo neexistuje s také, že $\{x \neq 0\}\ s\ \{x = 0\}$, pretože ak je to bol prvý príkaz (teda $x := 0$ if $x < 0$), potom

     $\{x \neq 0\}\ x := 0$ if $x < 0\ \{x = 0\}$

     $\{x \neq 0 \wedge x < 0\}\ x := 0\ \{x = 0\}$
   - priradenie $x := 0$ sa ale pre $x > 0$ „nevykoná" a tak výstupná podmienka $x = 0$ nebude platiť
   - rovnako nemôže vyhovovať ani druhé priradenie

Leads-to

- program F má vlastnosť „ p leads-to q“ ($p \rightarrow q$) ak táto vlastnosť môže byť odvodená konečným počtom aplikácií nasledujúcich odvodzovacích pravidiel (tvar hypotéza / záver):
  1. p ensures q / $p \rightarrow q$
  2. $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$ / $p \rightarrow r$ /* tranzitivita */
  3. $\langle \forall m : m \in W :: p(m) \rightarrow q \rangle$ /
     $\langle \exists m : m \in W :: p(m) \rangle \rightarrow q$

  pre nejakú množinu W /* disjunkcia */
- Ak p sa stane true, tak q je alebo bude true.
- Nemožno však tvrdiť, že p ostane true, až kým q nie je true.
- Z „ p leads-to q“ možno odvodiť:

  $p[R_j] \Rightarrow \langle \exists m : m \geq j :: q[R_m] \rangle$ /* q niekedy platí */

Leads-to príklady

1. Z pravidla disjunkcie dostaneme, že platí nasledovné: $p_1 \to q,\ \ p_2 \to q \ / \ p_1 \vee p_2 \to q.$

   Totiž $\langle \forall m: m \in \{1, 2\} :: p(m) \to q \rangle \ / \ \langle \exists m: m \in \{1, 2\} :: p(m) \to q \rangle$.

2. Pre Program P z príkladov pre ensures dokážeme, že

   "$x \neq 0 \to x = 0$".

   $x \neq 0$ ensures $x \geq 0$ /* z programu */

   $x \neq 0 \to x \geq 0$ /* z predchádzajúceho */

   $x \geq 0$ ensures $x = 0$ /* z programu */

   $x \geq 0 \to x = 0$ /* z predchádzajúceho */

   $x \neq 0 \to x = 0$ /* z tranzitivity */

Pevný bod

- je to stav programu, ktorý sa ďalším vykonávaním programu už nemení
- definujme predikát FP pre program G:
  - FP $\equiv \langle\ \forall$s: s *in* G $\wedge$ s is x := E :: x = E $\rangle$
  - FP[R_j] $\equiv \langle\ \forall k$: $k \geq j$ :: R_k.state = R_j.state $\rangle$
- Príklady

1. $k := k + 1$

   FP $\equiv k = k + 1 \equiv$ false

2. $k := k + 1$ if $k <$ N

   FP $\equiv [k <$ N $\Rightarrow k = k + 1] \equiv k \geq$ N

3. $\langle$ □ j: $0 \leq j <$ N :: $m = \max(m, A[j]) \rangle$,

FP $\equiv \langle\ \wedge j$: $0 \leq j <$ N :: $m = \max(m, A[j]) \rangle \equiv$

$\langle\ \wedge j$: $0 \leq j <$ N :: $m \geq A[j] \rangle \equiv$

$m \geq \langle$ max j: $0 \leq j <$ N :: $A[j] \rangle$

Vlastnosti unless 1

- Reflexívnosť a antireflexívnosť:

  p unless p

  p unless $\neg p$

  Dôkaz: {false} s {p}, {p} s {true} pre $\forall s$

- Zoslabenie:

  p unless q, $q \Rightarrow r$ / p unless r

  Dôkaz:

  {$p \wedge \neg q$} s {$p \vee q$}. Z $q \Rightarrow r$, $\neg r \Rightarrow \neg q$ a teda

  $p \wedge \neg r \Rightarrow p \wedge \neg q$

  $p \vee q \Rightarrow p \vee r$ a teda

  {$p \wedge \neg r$} S {$p \vee r$}, t.j. „p unless r".

Vlastnosti unless 2

- Disjukcia

  p unless q, p' unless q' /

  / $(p \vee p')$ unless $(\neg\, p \wedge q') \vee (\neg\, p' \wedge q) \vee (q \wedge q')$

- Konjunkcia

  p unless q, p' unless q' /

  / $(p \wedge p')$ unless $(p \wedge q') \vee (p' \wedge q) \vee (q \wedge q')$

  Dôkaz: $\wedge$ a $\vee$ môžu byť aplikované na post- a pre-conditions, teda

  $\{(p \wedge \neg q) \wedge (p' \wedge \neg q')\}\ s\ \{(p \vee q) \wedge (p' \vee q')\}$,

  potom použiť pravidlo

  $p' \Rightarrow p,\ q \Rightarrow q',\ \{p\}\ S\ \{q\}\ /\ \{p'\}\ S\ \{q'\}$

Vlastnosti unless 3

- Jednoduchá disjukcia

  p unless q, p' unless q' / $p \vee p'$ unless $q \vee q'$

- Jednoduchá konjunkcia

  p unless q, p' unless q' / $p \wedge p'$ unless $q \vee q'$

  Dôkaz: z predošlých viet a zoslabenia

- "Tranzitivita"

  p unless q, q unless r / $p \vee q$ unless r

  Dôkaz: disjunkcia a zoslabenie

Vlastnosti unless 4

- Dôsledok 1.

  $p \Rightarrow q$ / p unless q

  Dôkaz: zoslabením. Podľa reflexívnosti p unless p,
  z predpokladu $p \Rightarrow q$ dostaneme p unless q

- Dôsledok 2.

  $\neg p \Rightarrow q$ / p unless q

  Dôkaz: zoslabením. Podľa antireflexívnosti p unless $\neg p$,
  z predpokladu $\neg p \Rightarrow q$ dostaneme p unless q

Vlastnosti unless 5

- Dôsledok 3.

  $[p \text{ unless } q \vee r] \equiv [p \wedge \neg q \text{ unless } q \vee r]$

Dôkaz:

Predpokladajme „p unless $q \vee r$”.

- antireflexivita: $\neg q$ unless q
- jednoduchá konjukcia: $p \wedge \neg q$ unless $q \vee r$

Predpokladajme “$p \wedge \neg q$ unless $q \vee r$”

- z dôsledku 1: $p \wedge q$ unless q
- jednoduchá disjunkcia: p unless $q \vee r$

Vlastnosti unless 6

- Dôsledok 4.

  $p \vee q$ unless r / p unless $q \vee r$

  Dôkaz:

  $p \vee q$ unless r /* predpoklad */

  $\neg\, q$ unless q /* antireflexívnosť */

  $p \wedge \neg q$ unless $q \vee r$ /* jednoduchá konjunkcia */

  p unless $q \vee r$ /* z dôsledku 3. */

- Dôsledok 5.

  $\langle \forall j :: p_j$ unless $p_j \wedge q_j \rangle$ / $\langle \forall j :: p_j \rangle$ unless $\langle \forall j :: p_j \rangle \wedge \langle \exists j :: q_j \rangle$

  Dôkaz: indukciou, IP (N = 2) použitím konjukcie

Vlastnosti ensures 1

- Reflexívnosť:

  p ensures p

  Dôkaz: p unless p a $\forall$s platí $\{p \wedge \neg p\}$ s $\{p\}$. Keďže každý program obsahuje aspoň jeden príkaz, tvrdenie je dokázané.

- Zoslabenie:

  p ensures q, $q \Rightarrow r$ / p ensures r

  Dôkaz:

  - zoslabenie pre unless platí, stačí teda ukázať, že ak $\exists$s také, že $\{p \wedge \neg q\}$ s $\{q\}$, potom $\{p \wedge \neg r\}$ s $\{r\}$
  - Vyplýva to z $q \Rightarrow r$, $\neg r \Rightarrow \neg q$ a teda

    $p \wedge \neg r \Rightarrow p \wedge \neg q$

Vlastnosti ensures 2

- Nemožnosť:

  p ensures false / $\neg p$

  Dôkaz: z "p ensures false" vieme, že $\exists$s {p} s {false}

  teda $p \equiv$ false
- Konjunkcia

  p ensures q, p' ensures q' /

  / $(p \wedge p')$ ensures $(p \wedge q') \vee (p' \wedge q) \vee (q \wedge q')$

  Dôkaz: podobný ako pre unless
- Disjukcia

  p ensures q / $p \vee r$ ensures $q \vee r$

  Dôkaz: z definície

Vlastnosti ensures 3

- Dôsledok 1.

  $p \Rightarrow q$ / p ensures q

  Dôkaz: p unless q a zoslabenie

- Dôsledok 2.

  $p \vee q$ ensures r / p ensures $q \vee r$

  Dôkaz:

$p \vee q$ unless r	/* z predpokladu */
p unless $q \vee r$	/* dôsledok 4 pre unless */
$p \vee q$ ensures r	/* predpoklad */
p ensures $q \vee r$	/* konjunkcia a zoslabenie */

Vlastnosti ensures 4

- Dôsledok 3.

  p unless $q \vee r$ / $p \wedge \neg q$ unless $q \vee r$

  Dôkaz:

  p ensures $q \vee r$ /* predpoklad */
  $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ ensures $q \vee r$ /* rozpísaný predpoklad */
  $p \wedge \neg q$ ensures $(p \wedge q) \vee (q \vee r)$ /* z dôsledku 2 */
  $p \wedge \neg q$ ensures $q \vee r$ /* z predchádzajúceho zoslabením */

Vlastnosti leads-to 1

- Technika dôkazov: indukcia vzhľadom na počet odvodení (dĺžka dôkazu) = *štrukturálna indukcia*

- Nemožnosť:

  $p \rightarrow$ false / $\neg p$

  Dôkaz. *Základný prípad*:
  - predpokladajme p ensures false
  - z nemožnosti pre ensures máme $\neg p$

  Indukčný krok: nech tvrdenie platí pre odvodenie dĺžky n.
  Uvažujme dva prípady podľa spôsobu odvodenia $p \rightarrow$ false

1. prípad ($p \rightarrow r$, $r \rightarrow$ false / $p \rightarrow$ false):

z $r \rightarrow$ false vyplýva *$\neg r$ (podľa indukčného predpokladu, keďže toto odvodenie je kratšie)*

Vlastnosti leads-to 2

Keďže $\neg r$ *z* $p \rightarrow r$ *dostaneme* $p \rightarrow$ false,

A keďže odvodenie $p \rightarrow r$ je kratšie ako *n* opäť podľa indukčného predpokladu dostaneme $\neg p$

2. Prípad ($\langle \forall m: m \in W :: p'(m) \rightarrow q \rangle$,
$p = \langle \forall m: m \in W :: p'(m) \rangle$)

$\langle \forall m: m \in W :: [p'(m) \rightarrow \text{false}] \ / \ \neg p'(m) \rangle$
$\neg q$ /* predpoklad */
$\langle \forall m: m \in W :: \neg p'(m) \rangle$ /* indukčný predpoklad */
$\neg \langle \exists m: m \in W :: p'(m) \rangle$ /* z predošlého */
$\neg p$ /* z definície *p* */

Vlastnosti leads-to 3

- Implikačná teoréma:

  $p \Rightarrow q \;/\; p \rightarrow q$

  Dôkaz:

  $p \Rightarrow q$ /* predpoklad */,

  p ensures q /* z predpokladu */

  $p \rightarrow q$ /* z definície leads-to */

- Disjunkčná veta (všeobecná): pre ľubovoľnú množinu W platí

  $\langle \forall m: m \in W :: p(m) \rightarrow q(m) \rangle \;/$

  $/ \; \langle \exists m: m \in W :: p(m) \rangle \rightarrow \langle \exists m: m \in W :: q(m) \rangle$

  Dôkaz: z predikátového počtu a implikačnou vetou

  $\langle \forall m: m \in W :: q(m) \Rightarrow \langle \exists n: n \in W :: q(n) \rangle \rangle$

  $\langle \forall m: m \in W :: q(m) \rightarrow \langle \exists n: n \in W :: q(n) \rangle \rangle$

  $\langle \forall m: m \in W :: p(m) \rightarrow q(m) \rangle$ /* predpoklad */

  /* z tranzitivity predchádzajúcich: */

  $\langle \forall m: m \in W :: p(m) \rightarrow \langle \exists n: n \in W :: q(n) \rangle \rangle$

  /* napokon z disjunkcie: */

  $\langle \exists m: m \in W :: p(m) \rangle \rightarrow \langle \exists m: m \in W :: q(m) \rangle$

Vlastnosti leads-to 4

- Cancellation

  $p \rightarrow q \vee b,\ b \rightarrow r\ /\ p \rightarrow q \vee r$

  Dôkaz:

  $b \rightarrow r$ /* predpoklad */

  $q \rightarrow q$ /* triviálne */

  $q \vee b \rightarrow q \vee r$ /* disjunkcia predchádzajúcich dvoch*/

  $p \rightarrow q \vee r$ /* z predpokladu $p \rightarrow q \vee b$ a predchádzajúceho*/

Vlastnosti leads-to 5

- Progress-Safety-Progress (PSP) veta:

  $p \rightarrow q$, r unless b / $p \wedge r \rightarrow (q \wedge r) \vee b$

Dôkaz. *Základný prípad:*

- p ensures q, r unless b
- treba ukázať, že $p \wedge r \rightarrow (q \wedge r) \vee b$
- z konjunkcie pre ensures a zoslabenia pravej strany

– *Indukčný krok (tranzitivita):*

- $p \rightarrow q'$, $q' \rightarrow q$, r unless b
- $p \wedge r \rightarrow (q' \wedge r) \vee b$ /* (*a*) */
- $p \wedge q' \rightarrow (q \wedge r) \vee b$ /* (*b*) */

Vlastnosti leads-to 6

cancellation na (a) a (b)

- *(disjunkcia):*
  - $\langle \forall m: m \in W :: p'(m) \rightarrow q \rangle$
  - $p = \langle \forall m: m \in W :: p'(m) \rangle$
  - r unless b
  - $\langle \forall m: m \in W :: p'(m) \wedge r \rightarrow (q \wedge r) \vee b \rangle$ /* (c) */
- z disjunkcie na (c):
  - $\langle \exists m: m \in W :: p'(m) \wedge r \rangle \rightarrow (q \wedge r) \vee b$
  - $\langle \exists m: m \in W :: p'(m) \rangle \wedge r \rightarrow (q \wedge r) \vee b$
  - $p \wedge r \rightarrow (q \wedge r) \vee b$ /* z definície p a predošlého */

Theorems about leads-to 4

- Completion veta:

  pre množinu predikátov p_j, q_j, $0 \leq j < \mathrm{N}$:

  $\langle \forall j :: p_j \rightarrow q_j \vee b \rangle$, $\langle \forall j :: q_j \text{ unless } b \rangle$ /

  / $\langle \wedge j :: p_j \rangle \rightarrow \langle \wedge j :: q_j \rangle \vee b$
- Dôsledok 1 (konečná disjunkcia).

  $p \rightarrow q$, $p' \rightarrow q'$ / $p \vee p' \rightarrow q \vee q'$

  Dôkaz: špeciálny prípad všeobecnej disjunkcie
- Dôsledok 2.

  $p \wedge b \rightarrow q$, $p \wedge \neg b \rightarrow q$ / $p \rightarrow q$

  Dôkaz: vyplýva z dôsledku 1
- Dôsledok 3.

  $p \rightarrow q$, r is stable / $p \wedge r \rightarrow q \wedge r$

  Dôkaz: z PSP theorem

Indukčný princíp pre leads-to

- W – dobre založená (well founded) množina je taká, že má reláciu usporiadania $\angle$ takú, že každá podmnožina má najmenší prvok

- metrika M: $States \to W$
  - $States$: stavy programu
  - $M(S)$ nahradíme iba M, ak S je jasné z kontextu
- $\langle \forall m: m \in W :: p \wedge M = m \longrightarrow (p \wedge M \angle m) \vee q \rangle \; / \; p \longrightarrow q$
- Z každého stavu kde platí p program dosiahne stav, v ktorom platí q alebo dosiahne stav, v ktorom p platí a hodnota M je nižšia.
- Keďže hodnota M nemôže klesať donekonečna, určite raz musí platiť q (*q holds eventually*).

Veta o FP

- Veta: Pre každý predikát p platí: FP $\wedge$ p is stable.

  Dôkaz: Ak FP platí, tak ďalším vykonávaním programu sa nemení jeho stav. Ak FP $\wedge$ p, tak aj naďalej FP $\wedge$ p, čiže FP $\wedge$ p is stable.

- Dôsledok: $p \rightarrow q$ / FP $\Rightarrow$ $(p \Rightarrow q)$

  Dôkaz:

  FP $\wedge$ $\neg q$ is stable /* teoréma o FP */
  (t.j. FP $\wedge$ $\neg q$ unless false)

  $p \rightarrow q$ /* predpoklad */

  $p \wedge$ FP $\wedge$ $\neg q \rightarrow [q \wedge$ (FP $\wedge$ $\neg q)] \vee$ false /* PSP teoréma */

  $[q \wedge$ (FP $\wedge$ $\neg q)] \vee$ false = false /* triviálne */

  $p \wedge$ FP $\wedge$ $\neg q \rightarrow$ false /* z predchádzajúcich dvoch */

  $\neg(p \wedge$ FP $\wedge$ $\neg q)$ /* nemožnosť leads-to */

  FP $\Rightarrow$ $(p \Rightarrow q)$

Architektúry a zobrazenia

Návrh programu má dve časti:

- UNITY program a dôkaz jeho správnosti

(v tejto fáze nemožno hovoriť o zložitosti)

- popis architektúr, implementovanie programu pre túto architektúru

(potom už možno riešiť aj otázky zložitosti)

Asynchrónne-Shared-Memory architektúry

- ASM:
  - pevne daná množina procesorov a pamätí
  - s každou pamäťou je asociovaná množina procesov, ktoré z nej môžu čítať a množina procesov, ktoré do nej môžu zapisovať
- Zobrazenie:
  - priradí každý príkaz nejakému procesu
  - priradí (alokuje) každú premennú pamäti
  - špecifikuje "control flow" pre každý proces (postupnosť udávajúca ako sú príkazy v danom procesore vykonávané)
- Celé to musí spĺňať:
  - všetky premenné na ľavej strane každého príkazu alokovaného k procesoru sú v pamätiach, do ktorých môže tento zapisovať (okrem indexov polí) a každá premenná na pravej strane (a všetky indexy na ľavej strane) sú v pamätiach, ktoré môžu čítať
  - control flow musí byť taký, že každý príkaz alokovaný ku procesoru je vykonaný nekonečne veľa krát

Distribuovaná architektúra

- Pozostáva z:
  - pevná množina procesorov a kanálov
  - lokálna pamäť pre každý procesor
- kanály:
  - error-free
  - prenášajú správy v rovnakom poradí ako boli poslané
  - pre každý kanál je 1 procesor, ktorý do neho posiela a 1 procesor, ktorý z neho prijíma
  - každý kanál má svoj buffer
  - procesor môže niečo poslať, ak buffer nie je plný a prijať, ak nie je prázdny
- Zobrazenie programov je rovnaké ako ASM

Distribuovaná architektúra

- premenné: sú alokované buď do (lokálnych) pamätí alebo ku kanálom
- Musí to spĺňať:
  - najviac 1 premenná je alokovaná ku kanálu a jej typ je postupnosť
  - ak nie je plná, potom zapisovateľ pridá správu do postupnosti na koniec
  - ak nie je prázdna, čitateľ odoberie prvý člen postupnosti

Synchrónne architektúry

Zobrazenia na Synchrónne architektúry

- podobne ako ASM
- naviac procesory majú spoločné hodiny; v každom kroku každý procesor vykoná inštrukciu
  - viacero procesorov môže zapisovať do pamäte naraz, ak píšu to isté
  - viacerí môžu čítať
  - nemožno naraz čítať aj písať
- Príklad: $x := x + 1 \;||\; y := x + 2$
  - 1. krok: každý procesor načíta x
  - 2. krok: jeden vypočíta $x + 1$, druhý $x + 2$
  - 3. krok: prvý zapíše x, druhý zapíše y

Synchrónne architektúry

- Existuje viacero možných zobrazení, my sa obmedzíme na nasledujúce:
  - presne jeden statement sa vykonáva v čase (bez ohľadu na počet procesorov)
- Príklad: $x := x + 1 \,||\, y := x + 2$ sa môže vykonať na 3 procesoroch takto:
  - A vypočíta $x + 1$
  - B vypočíta $x + 2$
  - C odpočíva

Synchrónne architektúry

- Musí to spĺňať:
  - popis aké operácie v každom príkaze majú byť vykonané procesormi
  - alokácia premenných
  - špecifikácia jedného "control flow" pre všetky procesory
  - konzistencia alokácií premenných (tak ako predtým)
- Príklad:
  - nech *op* je asociatívna operácia
  - majme statement s $\equiv \langle op\ j{:}\ 1 \le j \le \mathrm{N} :: x[j] \rangle$
  - s môže byť vykonané v čase $O(\log \mathrm{N})$ na N procesoroch
  - s môže byť vykonané v čase $O(\mathrm{N/K} + \log(\mathrm{K}))$ na K procesoroch (rozdelí sa do K skupín po N/K prvkov a tam sekvenčne)

Výpočet maxima 1

Úloha: určiť $m = \langle \max j: 0 \le j < N:: A[j] \rangle$ pre dané pole A[0..N − 1]

Sekvenčná architektúra (SA):

- invariant $m \le \langle \max j: 0 \le j < N:: A[j] \rangle$
- FP $\equiv m \ge \langle \max j: 0 \le j < N:: A[j] \rangle$
- FP možno písať aj takto:

  FP $\equiv \langle \wedge j: 0 \le j < N:: m \ge A[j] \rangle$

  FP $\equiv \langle \wedge j: 0 \le j < N:: m = \max(m, A[j]) \rangle$

Program Maximum1

initially $m = -\infty$

assign $\langle \; \square \;\; j: 0 \le j < N:: m := \max(m, A[j]) \; \rangle$

end {Maximum1}

Výpočet maxima 2

každé z priradení sa môže *napríklad* vykonať viac ráz po sebe, čo nie je efektívne; dve stratégie, ako sa takejto neefektívnosti vyhnúť:

1. možnosť:

   initially $j = 0$

   $m, j := \max(m, A[j]), j + 1$ if $j < N$

2. možnosť:

   initially $\langle \,||j\colon 0 \le j < N :: e[j] = \text{true} \rangle$

   $m, e[j] := \max(m, A[j]), \text{false}$ if $e[j]$

Výpočet maxima 3

Paralelná architektúra (PA):

- prvky A dáme ako listy binárneho stromu
- každý vnútorný vrchol má hodnotu maxima jeho synov
- koreň má maximum
- strom máme v poli $X[1..(2N-1)]$
- j-ty vrchol má synov $2j$ a $2j+1$
- initially $X[N..(2N-1)] = A[0..N-1]$

- Program Maximum2
  declare X: array $[1..(2N-1)]$ of integer
  always
  $\langle \,||j: 0 \le j < N:: X[N+j] = A[j] \,\rangle$
  $\Box\langle \,\Box\, j: 1 \le j < N:: X[j] = \max(X[2j], X[2j+1]) \,\rangle$
  end {Maximum2}
- ľahko vidno, že $X[1] = \langle \max j: 0 \le j < N:: A[j] \,\rangle$

Výpočet maxima 4

- ideme ušetriť pamäť: nech N = 2M

Program Maximum3
assign $\langle ||j: 0 \le j < N:: A[j] = \max(A[2j], A[2j+1]) \rangle$
end {Maximum3}

- A[0] = maximum, v čase $O(\log N)$
- použijeme pomocnú premennú t
  - na začiatku $t = N$
  - v každom kroku jej hodnota bude $t := \lceil t/2 \rceil$
- nech $A^0[j]$ sú počiatočné hodnoty v A[j]
- invariant:
  $\langle \max j: 0 \le j < t:: A[j] \rangle = \langle \max j: 0 \le j < N:: A^0[j] \rangle$
- raz určite $t = 1$ a potom $A[0] = \langle \max j: 0 \le j < N:: A^0[j] \rangle$

Najkratšia cesta 1

- orientovaný graf: dvojica $G = (V, E)$, kde $E \subseteq V \times V$
- hrana z vrcholu i do j: dvojica $(i, j) \in E$
- cesta: postupnosť na seba nadväzujúcich hrán
- cyklus: cesta z vrcholu i do i
- váhovaný graf: graf, v ktorom každá cesta má celočíselnú váhu (tiež ohodnotený graf)
- dĺžka cesty: suma váh všetkých hrán na ceste
- váhová matica: (váhovaného grafu s N vrcholmi) je matica W typu $N \times N$, v ktorej $W[i, j] =$
  - váha hrany (i, j), ak $(i, j) \in E$
  - 0, ak $i = j$
  - ∞, ak $i \neq j \wedge (i, j) \notin E$
- prázdna cesta: z vrcholu i do j vždy existuje; jej dĺžka: ∞

Najkratšia cesta 2

Problém najkratších ciest:

- daný je váhovaný graf G a jeho váhová matica
- G neobsahuje cykly s negatívnou dĺžkou
- vypočítať maticu D typu $N \times N$, v ktorej $D[i, j]$ je dĺžka najkratšej cesty z vrcholu i do j
- hodnotu $D[i, j]$ budeme nazývať *vzdialenosť* i, j
- ak neexistuje cesta z vrcholu i do j, tak $D[i, j] = \infty$

Najkratšia cesta 3

- Špecifikácia: program má počítať maticu d tak, že

  invariant FP $\Rightarrow$ (d = D)

  true $\rightarrow$ FP
- Stratégia neformálne:
  - nech $d[i, j]$ je dĺžka *nejakej* cesty z vrcholu i do j
  - ak nájdeme cestu kratšej dĺžky l (čiže $l < d[i, j]$), tak potom $d[i, j] := l$
  - konkrétne ak $\exists k$ také, že $d[i, k] + d[k, j] < d[i, j]$, tak cesta cez vrchol k je kratšia
  - $d[i, j] :=$ min { $d[i, j]$, $d[i, k] + d[k, j]$ | $0 \leq k <$ N}
  - nešpecifikujeme
    - ako vyberáme i, j, k
    - kedy sa operácie vykonávajú
    - ktoré procesory ich vykonávajú

Najkratšia cesta 4

- Stratégia, formálny popis:

  - na začiatku $d[i, j] := W[i, j]$
  - $d[i, j]$ sa v priebehu výpočtu nebude zvyšovať, teda nemôže prekročiť $W[i, j]$
  - invariant:

$d[i, j]$ je dĺžka nejakej cesty z vrcholu i do $j \wedge d[i, j] \leq W[i, j]$ (1)

$FP \equiv \langle \wedge i, j, k :: d[i, j] := \min(d[i, j], d[i, k] + d[k, j]) \rangle$ (2)

Najkratšia cesta 5

Aby sme zabezpečili, že vždy dosiahneme FP, ukážeme, že ak nejaký stav nie je FP, tak aspoň jedno $d[i, j]$ klesne. Metrika, ktorú použijeme, je nasledovná: suma $\forall d[i, j]$. Keďže však niektoré hodnoty môžu byť ∞, použijeme dvojice (num, sum) v lexikografickom usporiadaní, kde

- num = počet (i, j) tak, že $d[i, j] = \infty$
- $sum = \langle +i, j : d[i, j]$ je konečné $:: d[i, j] \rangle$

metrika je ohraničená zdola, keďže nemáme cykly so zápornou dĺžkou žiadna váha nie je $-\infty$

Progress condition: metrika klesá, ak stav nie je FP:

$$\neg \text{FP} \wedge (num, sum) = (m, n) \rightarrow (num, sum) < (m, n) \qquad (3)$$

Najkratšia cesta 6

- Dôkaz správnosti stratégie:
  - metrika je ohraničená zdola a klesá, ak stav nie je FP $\Rightarrow$ FP sa nakoniec dosiahne
  - v každom FP invariant platí, stačí teda ukázať, že matica, ktorá spĺňa (1) a (2) je riešením problému
  - nemáme cykly zápornej dĺžky $\Rightarrow \forall i, j \exists$najkratšia cesta s najviac N−1 hranami
  - uvažujeme $\forall(x, y)$ také, že najkratšia cesta z x do y má najviac m hrán. Indukciou podľa m dokážeme, že vzdialenosť x, y je $d[x, y]$:

    1. $m = 1$: triviálne $d[x, y] = W[x, y]$

    2. nech tvrdenie platí pre m a nech najkratšia cesta z x do y má $m+1$ hrán. Predposledný vrchol tejto cesty nech je z, potom
       - cesta x, z: m hrán
       - cesta z, y: 1 hrana

    podľa indukčného predpokladu
       - $d[x, y] \leq d[x, z] + d[z, y]$

Najkratšia cesta 7

Formálny popis programu:

Program P1

initially ⟨ || i, j :: $d[i, j] = W[i, j]$ ⟩

assign ⟨ □i, j, k :: $d[i, j] := \min(d[i, j], d[i, k] + d[k, j])$ ⟩

end{P1}

program má N^3 priradení

Najkratšia cesta - sekvenčná architektúra

- najjednoduchšie na sekvenčnej architektúre: vykonať N^3 priradení cez 3 cykly (i, j, k), kde i, j beží rýchlejšie ako k
- každý príkaz sa vykoná práve raz
- uvažujme cesty z i do j, v ktorých indexy vrcholov, čo sa na týchto cestách nachádzajú, sú menšie než k okrem koncových vrcholov i, j; nech $H[i, j, k]$ je minimálna dĺžka takýchto ciest

Veta:

$$\langle \wedge i, j :: H[i, j, 0] = W[i, j] \rangle \wedge$$
$$\langle \wedge i, j, k :: H[i, j, k+1] =$$
$$\min(H[i, j, k], H[i, k, k] + H[k, j, k]) \rangle \qquad (4)$$

Dôkaz. Uvažujme cestu, ktorá dosahuje minimum $H[i, j, k+1]$

- ak k nie je v tejto ceste, tak $H[i, j, k+1] = H[i, j, k]$
- ak k je v tejto ceste, tak $H[i, j, k+1] = H[i, k, k] + H[k, j, k]$

Podľa definície $d[i, j] = H[i, j, N]$ (vrcholy sú $0..N-1$)

Najkratšia cesta - sekvenčná architektúra

Veta: Množina rovností (4) je “proper”.
Dôkaz.

- každé H[i, j, k] je na ľavej strane práve raz
- rovnice usporiadame tak, že k bude neklesajúce

Program P2

declare H: array[0..N−1, 0..N−1, 0..N]
always
⟨ || i, j :: H[i, j, 0] = W[i, j] ⟩
□ ⟨ □k :: ⟨ i, j :: H[i, j, k +1] =
min(H[i, j, k], H[i, k, k] + H[k, j, k]) ⟩⟩
□ ⟨ || i, j :: d[i, j] = H[i, j, N] ⟩
end

- O(N^3) rovností
- O(N^3) pamäte a času

Najkratšia cesta - sekvenčná architektúra

Program s explicitnou sekvencializáciou:

PASCAL-like program PP (sekvencializácia P1)

```
for x := 0 to N–1 do
 for u := 0 to N–1 do
  for v := 0 to N–1 do
   d[u,v] := min(d[u,v], d[u,x] + d[x,v])
```

Najkratšia cesta - sekvenčná architektúra

- Indexy v PP sú modifikované nasledujúcim spôsobom: (x, u, v):=(x, u, v)+1, kde (x, u, v) je trojmiestne číslo v N-árnej sústave

Program P3 {Floyd–Warshall}

declare x, u, v: int

initially $\langle$ || i, j :: $d[i, j] = W[i, j]$ $\rangle$ || $x, u, v = 0, 0, 0$

assign

$d[u, v] := \min(d[u, v], d[u, x] + d[x, v])$

|| $(x, u, v) := (x, u, v) + 1$

if $(x, u, v) \neq (N - 1, N - 1, N - 1)$

end{P3}

Najkratšia cesta - paralelná synchrónna architektúra

$O(N)$ krokov s $O(N^2)$ procesormi

transformujeme program tak, že vyčleníme priradenia, ktoré sa môžu vykonať naraz; je ich N^3, rozdelíme ich na N skupín po N^2 priradení.

Program P1’

initially ⟨ || i, j :: $d[i, j] = W[i, j]$ ⟩

assign

⟨ □ k :: ⟨ ||i, j :: $d[i, j] := \min(d[i, j], d[i, k] + d[k, j])$ ⟩

end{P1’}

Najkratšia cesta - paralelná synchrónna architektúra

Uvažujeme, že máme architektúru s N^2 procesormi a určíme poradie vykonávania priradení

Program {parallel Floyd–Warshall} P4

declare k: int

initially $\langle \,||\, i, j :: d[i, j] = W[i, j] \,\rangle \,||\, k = 0$

assign

$\langle \,||i, j :: d[i, j] := \min(d[i, j], d[i, k] + d[k, j])\rangle$ if $k < N$

$||\; k := k + 1$ if $k < N$

end{P4}

program P4: potrebuje $O(N)$ krokov

Najkratšia cesta - paralelná synchrónna architektúra

$O(\log^2 N)$ krokov s $O(N^3)$ procesormi

P4 nie je vhodný, ak máme N^3 procesorov, pretože ich nevyužjeme všetky

Program P5

initially $\langle \,||\, i, j :: d[i, j] = W[i, j] \,\rangle$

assign $\langle \,||i, j :: d[i, j] := \langle \min k :: d[i, k] + d[k, j] \,\rangle\rangle$

end{P5}

program pozostáva z jediného príkazu, ktorý priradí N^2 hodnôt

po m-tom vykonaní príkazu platí nasledovný invariant:

$d[i, j]$ je dĺžka najkratšej cesty z i do j s najviac $2^m - 1$ vrcholmi medzi i a j

Najkratšia cesta - paralelná synchrónna architektúra

FP sa dosiahne po $O(\log N)$ vykonaniach príkazu

- na jedno vykonanie treba čas $O(\log N)$; ide o nájdenie minima a výpočet $d[i, k] + d[k, j]$
  - $d[i, k] + d[k, j]$ môže byť vypočítané na N^3 procesoroch v konštantnom čase
  - pre dané i, j minimum cez k môže byť vypočítané v čase $O(\log N)$ pomocou $O(N)$ procesorov
- teda každý krok možno urobiť v čase $O(\log N)$ a s $O(N^3)$ procesormi
- keďže výpočet má $O(\log N)$ krokov, tak program P5 vypočíta D v čase $O(\log^2 N)$ a s $O(N^3)$ procesormi

Najkratšia cesta – asynchrónna architektúra

P2 môže byť alokovaný do ASV s N^2 procesormi tak, že každý počíta $H[i, j, k]$ pre dané i, j

využijeme nasledujúci vlastnosť:

$$H[i, j, k+1] \leq H[i, j, k]$$

ako dôsledok: môžeme použiť $H[i, j, k + m]$ namiesto $H[i, j, k]$ pre $m \geq 0$

Formulujme nasledujúci invariant:

$d[i, j] = H[i, j, k]$
$\wedge$ $d[i, j]$ je dĺžka nejakej cesty z i do j
$\wedge$ $k \leq N$

Najkratšia cesta – asynchrónna architektúra

v P4 je synchrónnosť podstatná – jedno k sa používa pre výpočet každého $d[i, j]$. Teraz predpokladáme asynchrónne riešenie, v ktorom $d[i, j]$ sa počíta (i, j)-tym procesorom a k sa nahradí lokálnou premennou $k[i, j]$

zoslabením predošlého invariantu dostaneme invariant

$$d[i, j] \leq \mathrm{H}[i, j, k[i, j]]$$
$$\wedge\ d[i, j] \text{ je dĺžka nejakej cesty z } i \text{ do } j$$
$$\wedge\ k[i, j] \leq \mathrm{N}$$

Najkratšia cesta – asynchrónna architektúra

základom pre nasledujúci program je toto pozorovanie (pre zjednodušenie r znamená $k[i, j]$):

Teoréma: Z predchádzajúceho invariantu vyplýva:

$(k[i, r] \geq r \wedge k[r, j] \geq r) \Rightarrow$

$\Rightarrow \min(d[i, j], d[i, r] + d[r, j]) \leq \mathrm{H}[i, j, r + 1]$

Dôkaz. Z jednej z predchádzajúcich viet vieme, že

$\mathrm{H}[i, j, k + 1] = \min(\mathrm{H}[i, j, k], \mathrm{H}[i, k, k] + \mathrm{H}[k, j, k])$

- musíme teda ukázať, že $(k[i, r] \geq r \wedge k[r, j] \geq r) \Rightarrow \min(d[i, j], d[i, r] + d[r, j]) \leq \min(\mathrm{H}[i, j, r], \mathrm{H}[i, r, r] + \mathrm{H}[r, j, r])$; nasledovne:

  $d[i, j] \leq \mathrm{H}[i, j, r]$ /* z invariantu */

  $d[i, r] \leq \mathrm{H}[i, r, k[i, r]]$ /* z invariantu */

  $\mathrm{H}[i, r, k[i, r]] \leq \mathrm{H}[i, r, r]$ /* z predpokladu */

  $d[i, r] \leq \mathrm{H}[i, r, r]$ /* z predošlých dvoch */

- podobne ukážeme, že $d[r, j] \leq \mathrm{H}[i, r, r]$

Najkratšia cesta – asynchrónna architektúra

Správnosť nasledujúceho programu vyplýva z invariantu a z nasledujúceho:

$$FP \Rightarrow \langle \wedge\ i, j :: k[i, j] \geq N \rangle$$

Pevný bod sa dosiahne, keďže metrika $\langle +\ i, j :: k[i, j] \rangle$ sa zvýši s každou zmenou stavu a je ohraničená zhora.

Program P6

declare k: array[0..N−1, 0..N−1] of int

initially $\langle \,||\ i, j :: d[i, j], k[i, j] = W[i, j], 0 \rangle$

assign {r znamená pre zjednodušenie $k[i, j]$}

$\langle \,\square\ i, j :: d[i, j], r := \min(d[i, j], d[i, r] + d[r, j]), r + 1$
if $r < N \wedge k[i, r] \geq r \wedge k[r, j] \geq r \rangle$

end{P6}

Porovnanie dvoch neklesajúcich postupností 1

- dané dve postupnosti f, g

  f: $\langle \wedge\, i \colon 0 \le i < \mathrm{N} :: f[i] \le f[i+1] \rangle$

  g: $\langle \wedge\, i \colon 0 \le i < \mathrm{N} :: g[i] \le g[i+1] \rangle$

- Úloha: zistiť, či $\{ f[i] \mid 0 \le i \le \mathrm{N} \} = \{ g[i] \mid 0 \le i \le \mathrm{N} \}$

- predpokladáme, že $f[0] = g[0]$, $f[\mathrm{N}] = g[\mathrm{N}]$ a tiež že $f[\mathrm{N}]$ resp. $g[\mathrm{N}]$ sú väčšie ako ostatné členy (dá sa to zaručiť tak, že položíme $f[0] = g[0] = -\infty$ a $f[\mathrm{N}] = g[\mathrm{N}] = \infty$)
- invariant I

  $0 \le u \le \mathrm{N} \wedge 0 \le v \le \mathrm{N} \wedge$

  $\wedge \{ f[i] \mid 0 \le i \le u \} = \{ g[i] \mid 0 \le i \le v \}$

Porovnanie dvoch neklesajúcich postupností 2

- Program Compare
  declare u, v: int
  initially u, v = 0, 0
  assign
  $u := u + 1$ if $u < \mathrm{N} \wedge f[u] = f[u + 1]$
  $\square$ $v := v + 1$ if $v < \mathrm{N} \wedge g[v] = g[v + 1]$
  $\square$ $u, v := u + 1, v + 1$
  if $u < \mathrm{N} \wedge v < \mathrm{N} \wedge f[u + 1] = g[v + 1]$
  end{Compare}

- FP $\equiv (u \geq \mathrm{N} \vee f[u] \neq f[u + 1]) \wedge$
  $(v \geq \mathrm{N} \vee g[v] \neq g[v + 1]) \wedge$
  $(u \geq \mathrm{N} \vee v \geq \mathrm{N} \vee f[u + 1] \neq g[v + 1])$

Porovnanie dvoch neklesajúcich postupností 3

- Z invariantu I možno odvodiť invariant

  $u = \mathrm{N} \equiv v = \mathrm{N}$

To použijeme na zjednodušenie FP

- Máme teda 2 možnosti:

  1. $u = \mathrm{N} \wedge v = \mathrm{N}$: z invariantu I f a g majú rovnakú množinu prvkov

  2. $u < \mathrm{N} \wedge v < \mathrm{N}$

- FP $\Rightarrow (f[u] \neq f[u + 1]) \wedge$

  $\wedge (g[v] \neq g[v + 1]) \wedge$

  $\wedge (f[u + 1] \neq g[v + 1])$

Porovnanie dvoch neklesajúcich postupností 4

- Predpokladajme $f[u + 1] < g[v + 1]$; potom

  $g[v] = f[u]$ /* z I */

  $f[u] < f[u + 1]$ /* z FP */

  $g[v] < f[u + 1] < g[v + 1]$, teda $f[u + 1]$ nie je medzi prvkami $g[\mathrm{I}]$, lebo g je neklesajúca

  $\{ f[i] \mid 0 \leq i \leq \mathrm{N} \} \neq \{ g[i] \mid 0 \leq i \leq \mathrm{N} \}$

  teda f a g nemajú rovnakú množinu prvkov
- $\mathrm{FP} \wedge \mathrm{I} \Rightarrow$

  $[u = \mathrm{N} \equiv v = \mathrm{N}] \wedge$

  $[u = \mathrm{N} \equiv \{ f[i] \mid 0 \leq i \leq \mathrm{N} \} = \{ g[i] \mid 0 \leq i \leq \mathrm{N} \}]$
- dá sa ukázať, že FP sa dosiahne

Porovnanie dvoch neklesajúcich postupností 5

Paralelná architektúra (PA):

- $f[u] \in \{\, g[i] \mid 0 \le i \le \mathrm{N} \,\} \equiv$
  $\langle \wedge\, v\colon 0 \le v < \mathrm{N} :: \neg(g[v] < f[v] < g[v+1]) \rangle$
- musíme teda počítať predikát
  $\langle \wedge\, u, v : 0 \le u < \mathrm{N}, 0 \le v < \mathrm{N} :: \neg(g[v] < f[u] < g[v+1]) \rangle \wedge$
  $\langle \wedge\, u, v : 0 \le u < \mathrm{N}, 0 \le v < \mathrm{N} :: \neg(g[u] < f[v] < g[u+1]) \rangle$
- zjednodušením tohoto predikátu dostaneme
  $\langle \wedge\, u, v : 0 \le u, v < \mathrm{N} ::$
  $f[u] = g[v] \vee$
  $g[v] \ge f[u+1] \vee$
  $f[u] \ge g[v+1] \,\rangle$
- $O(\mathrm{N}^2)$ konjunkcií a každá je disjunkciou 3 častí:
  čas $O(\log \mathrm{N})$ na $O(\mathrm{N}^2)$ synchrónnych procesoroch

Dosiahnuteľnosť v orientovanom grafe

- Daný graf $G = (V, E)$
- počiatočný vrchol: *init*

- Dosiahnuteľnosť:
  1. vrchol *init* je dosiahnuteľný
  2. ak u je dosiahnuteľný a (u, v) je hrana t.j. $(u,v) \in E$, tak aj v je dosiahnuteľný
  3. žiaden iný nie je dosiahnuteľný

Úloha: vypočítať r tak aby:

- $r[v]$ je true, ak vrchol v je dosiahnuteľný:

  $\langle \wedge v: v \in V :: r[v] \equiv$ vrchol v je dosiahnuteľný $\rangle$

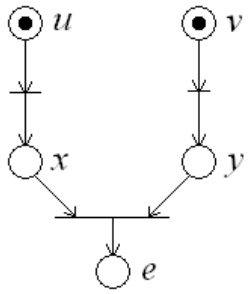
- invariant

  $\langle \wedge v: v \in V :: r[v] \Rightarrow v$ je dosiahnuteľný $\rangle \wedge r[init]$

Dosiahnuteľnosť v orientovanom grafe

- FP $\equiv \langle \wedge u, v: (u, v) \in E :: r[u] \Rightarrow r[v] \rangle$
  FP $\equiv \langle \wedge u, v: (u, v) \in E :: r[u] \Rightarrow (r[u] \vee r[v]) \rangle$
  keďže $r[u] \Rightarrow (r[u] \vee r[v]) \equiv (r[u] \Rightarrow r[v])$
- platnosť invariantu zaručíme, ak na začiatku bude
  $r[v]$ = false pre $v \neq init$ *a* $r[init]$ = true
- Program Reach
  declare r: array[V] of boolean
  initially $\langle \square v: v \in V :: r[v] = (v = init) \rangle$
  assign $\langle \square u, v: (u, v) \in E :: r[u] := r[u] \vee r[v] \rangle$
  end{Reach}
- Ľahko možno ukázať, že FP sa dosiahne. Ako metriku môžeme použiť: M = $|\{ v \mid \neg r[v] \}|$

Simulácia Petriho sietí



- Program PetriNet

  initially $u, v, x, y, e = 1, 1, 0, 0, 0$

  assign

  $u, x := u - 1, x + 1$ if $u > 0$

  $\square$ $v, y := v - 1, y + 1$ if $v > 0$

  $\square$ $x, y, e := x - 1, y - 1, e + 1$ if $x > 0 \wedge y > 0$

  end{PetriNet}

Readers–Writers Problem 1

Zadanie:

- daný program (user), v ktorom sú dve premenné *nr*, *nw* také, že pre nejakú konštantu N platí

  invariant $0 \leq nr \leq N \wedge 0 \leq nw \leq N$ (1)

- initially $nr = nw = 0$
- hodnoty *nr*, *nw* sa menia len v nasledujúcich druhoch priradení v programe user:

  $nr := nr + 1$ {started read}

  $nr := nr - 1$ {end read}

  $nw := nw + 1$ {started write}

  $nw := nw - 1$ {end write}

  (v týchto priradeniach môžu byť aj iné premenné) a program user môže mať aj iné priradenia

Readers–Writers Problem 2

Úloha: modifikovať priradenia programu user tak, aby platilo:

invariant $nw \leq 1 \wedge (nr = 0 \vee nw = 0)$ (2)

- *nr*, *nw* znamenajú počet čítajúcich a zapisujúcich procesov (do súboru) v danom čase
- počet procesorov je obmedzený na N (invariant 1)
- hocikoľko veľa môže čítať, ale zápis sa nemôže vykonať súčasne s iným zápisom alebo čítaním

Readers–Writers Problem 3

Riešenie:

- ak $0 \le nr \le \mathrm{N} \wedge 0 \le nw \le \mathrm{N}$, tak
  $[nw \le 1 \wedge (nr = 0 \vee nw = 0)] \equiv [(nr + \mathrm{N}\times nw) \le \mathrm{N}]$
- nech $t = \mathrm{N} - (nr + \mathrm{N}\times nw)$
- máme nový invariant $t \ge 0$ (3)
- modifikovaný program user:

```
declare t: int
always t = N – (nr + N×nw)
assign
    nr := nr + 1 if t ≥ 1          {started read}
 ▯  nr := nr – 1                   {end read}
 ▯  nw := nw + 1 if t ≥ N          {started write}
 ▯  nw := nw – 1                   {end write}
```

Readers–Writers Problem 4

- Toto riešenie nezaručuje „progress“ ani pre čítajúcich ani pre zapisujúcich. Nemáme požiadavku, že čítanie alebo zápis niekedy raz skončí, a teda nemôžeme tvrdiť, že iné čítanie alebo zápis začnú.
- *nr* a *nw* nám neumožňujú formulovať tvrdenia o jednotlivých čítaniach a zápisoch
- Predpokladajme, že všetky čítania skončia v konečnom čase. Modifikujeme riešenie tak, že potom raz určite (*eventually*) dôjde aj na zápis.
- predpokladajme

$$nr = k \ \wedge \ k > 0 \rightarrow nr \neq k \qquad (4)$$

Readers–Writers Problem 5

- nech *nq* je počet procesov čakajúcich na zápis

  invariant $nq \geq 0$
- Úloha: modifikovať program user tak, aby boli zachované predchádzajúce invarianty a naviac

  invariant $nq > 0 \rightarrow nw = 1$ (5)

- jednoduchá reštriktívna stratégia: zabrániť čítaniu, ak niekto čaká na zápis; má však zložitú distribuovanú implementáciu, musel by totiž poslať požiadavku na zápis všetkým čakateľom

Readers–Writers Problem 6

- menej prísna stratégia: ak $nq \geq 0$, tak sa niekedy (*eventually*) zabráni čítaniu (started read)
- použijeme novú premennú *b*: boolean
  1. $b \Rightarrow$ niekto čaká na zápis
  2. ak niekto chce písať, tak začne alebo *b* bude platiť
  3. ak *b* platí, tak *b* ostáva platné, až kým sa napokon raz začne zapisovať
  4. ak *b* platí, nemožno čítať
- v nasledujúcom programe nie sú uvedené priradenia zvyšujúce *nq*, keďže tieto sa nemodifikujú

Readers–Writers Problem 7

- Modifikácia programu user

declare t: int, b: boolean
always $t = \mathrm{N} - (nr + \mathrm{N}.nw)$
initially b = false
assign

$nr := nr + 1$ if $t \geq 1 \wedge \neg b$	{started read}
▯ $nr := nr - 1$	{end read}
▯ $nw, nq, b := nw + 1, \mathrm{nq} - 1,$ false if $t \geq \mathrm{N} \wedge nq > 0$	{started write}
▯ $nw := nw - 1$	{end write}
▯ $b := nq > 0$	{set b}

Readers–Writers Problem 8

- Dôkaz (5), t.j ($nq > 0 \rightarrow nw = 1$) plynie z (4) a (6)–(9):

  $b \Rightarrow nq > 0$ (6) z programu

  $nq > 0$ ensures $nw = 1 \vee b$ (7) z programu

  $b \wedge nr = 0$ ensures $nw = 1$ (8) z programu

  $b \wedge nr = k \wedge k > 0$ unless $b \wedge nr < k$ (9) z programu

  (už sme neformálne urobili predtým)

- chceme ukázať, že $nq > 0 \rightarrow nw = 1$:

  $b \wedge nr = k \wedge k > 0 \rightarrow b \wedge nr < k$ (PSP 4, 9)

- aplikujeme indukciu

  $b \rightarrow nr = 0 \wedge b$ (10)

- tranzitivita s (8) a (10): $b \rightarrow nw = 1$ (11)
- kombináciou (7) a (11) dostávame výsledok.

Spojenie programov 1

- nech F, G sú dva UNITY-programy

- spojenie programov F a G, označenie F G
  - spoja sa zodpovedajúce si časti z F a G
  - predpokladá sa, že nevznikajú nekonzistentcie s

    premennými
    ich inicializáciou
    always sekciou

Spojenie programov 2

Spojovacia veta:

1. p unless q in F ▯ G =
   p unless q in F $\wedge$ p unless q in G
2. p ensures q in F ▯ G =
   [p ensures q in F $\wedge$ p unless q in G] $\vee$
   [p ensures q in G $\wedge$ p unless q in F]
3. (FP of F ▯ G) = (FP of F) $\wedge$ (FP of G)

Dôkaz:

3. Vyplýva priamo z definície
1. p unless q in F ▯ G
   = $\langle\ \forall$s: s in F ▯ G :: $\{p \wedge \neg q\}$ s $\{p \vee q\}\ \rangle$
   = $\langle\ \forall$s: s in F :: $\{p \wedge \neg q\}$ s $\{p \vee q\}\ \rangle \wedge$
   $\langle\ \forall$s: s in G :: $\{p \wedge \neg q\}$ s $\{p \vee q\}\ \rangle$
   = p unless q in F $\wedge$ p unless q in G

Spojenie programov 3

2. p ensures q in F ▯ G

$= p$ unless q in F ▯ G $\wedge$ $\langle$ $\exists$s: s in F ▯ G :: $\{p \wedge \neg q\}$ s $\{q\}$ $\rangle$

$= p$ unless q in F ▯ G $\wedge$

$[\langle$ $\exists$s: s in F :: $\{p \wedge \neg q\}$ s $\{q\}$ $\rangle \vee$

$\langle$ $\exists$s: s in F :: $\{p \wedge \neg q\}$ s $\{q\}$ $\rangle]$

$=$ [p unless q in F ▯ G $\wedge$ $\langle$ $\exists$s: s in F :: $\{p \wedge \neg q\}$ s $\{q\}$ $\rangle] \vee$

[p unless q in F ▯ G $\wedge$ $\langle$ $\exists$s: s in G :: $\{p \wedge \neg q\}$ s $\{q\}$ $\rangle]$

$=$ [p unless q in F $\wedge$ p unless q in G

$\wedge$ $\langle$ $\exists$s: s in F :: $\{p \wedge \neg q\}$ s $\{q\}$ $\rangle] \vee$

[p unless q in F $\wedge$ p unless q in G

$\wedge$ $\langle$ $\exists$s: s in G :: $\{p \wedge \neg q\}$ s $\{q\}$ $\rangle]$

$=$ [p ensures q in F $\wedge$ p unless q in G] $\vee$

[p ensures q in G $\wedge$ p unless q in F]

Spojenie programov 4

- Dôsledky:

1. *p* is stable in F □ G = (*p* is stable in F) ∧ (*p* is stable in G)
2. *p* unless *q* in F, *p* is stable in G / *p* unless *q* in F □ G
3. *p* is invariant in F, *p* is stable in G / *p* is invariant in F □ G
4. *p* ensures *q* in F, *p* is stable in G / *p* ensures *q* in F □ G
5. (lokalita) Ak niečo z nasledujúcich tvrdení platí pre F, kde *p* je lokálne k F (ak používa len premenné lokálne ku F), tak to platí aj pre F □ G (G je ľubovoľné):
   - *p* unless *q*,
   - *p* is invariant
   - *p* ensures *q*

Spojenie programov 5

Podmienené vlastnosti:

Majme dve množiny nepodmienených vlastností - hypotéza a záver

Podmienené vlastnosti majú tvar:

hypotéza / záver

Podmienená vlastnosť programu F: hypotéza aj záver môžu byť vlastnosťami programu F, G, F G pre nejaký generický program G

význam: vezmeme hypotézu ako predpoklad, záver sa dá dokázať z „textu“ F

Spojenie programov 6

Príklad:

Program F
declare x: int
assign
$y := -y$ if $x \leq 0 \wedge y > 0$
$\square$ $x := x - 1$
end{F}

nech x sa nemení mimo F (y sa môže meniť aj mimo F)

príklad podmienenej vlastnosti:

- Hypotéza: $y \neq 0$ is stable in F $\square$ G
- Záver: $y > 0 \rightarrow y < 0$ in F $\square$ G

Večerajúci filozofi 1

- daný je súvislý, konečný, neorientovaný graf G bez slučiek
- jeho vrcholy reprezentujú procesy (filozofi)
- (u, v) je označenie hrany medzi u a v
- boolovská matica incidencie E

  $E[u, v] = E[v, u], \neg E[u, u]$
- pre $\forall u$ máme premennú u.dine s hodnotami t, h, e (u.dine má práve jednu z týchto hodnôt)
- označenie:

  $u.t \equiv$ (u.dine = t) *thinking*

  $u.h \equiv$ (u.dine = h) *hungry*

  $u.e \equiv$ (u.dine = e) *eating*

Večerajúci filozofi 2

- možná zmena stavu premennej *u*.dine je len:

  $t \rightarrow h \rightarrow e \rightarrow t \rightarrow \ldots$
- realizovanie zmien stavu premennej *u*.dine:
  - program user: $t \rightarrow h$, $e \rightarrow t$
  - program os: $h \rightarrow e$
- Úloha: navrhnúť program os tak, aby os user

  (user je daný) zabezpečil, že:
  - susedia nejedia naraz
  - hladný raz určite (*eventually)* bude jesť (ak žiadny proces neje večne, tak na každého hladného určite raz dôjde)

Večerajúci filozofi 3

- Špecifikácia pre user:
  - $u.t$ unless $u.h$ in user (udn1)
  - stable $u.h$ in user (udn2)
  - $u.e$ unless $u.t$ in user (udn3)
  - podmienená vlastnosť pre user: (udn4)

    $\langle \forall (u, v) :: \neg(u.e \wedge v.e) \rangle$ /

    $\langle \forall u :: u.e \rightarrow \neg u.e \rangle$

- Špecifikácia pre user □ os:
  - invariant $\neg(u.e \wedge v.e \wedge E[u, v])$ in user □ os (dn1)
  - $u.h \rightarrow u.e$ in user □ os (dn2)

Večerajúci filozofi 4

- obmedzenia pre os:
  - constant *u*.*t* in os (odn1)
  - stable *u*.*e* in os (odn2)

t.j. v os nie sú prechody z *eating* a prechody z a do *thinking*

- odvodená vlastnosť pre user:
  - stable ¬*u*.*e* in user
- odvodené vlastnosti pre os:
  - stable ¬*u*.*h* in os
  - *u*.*h* unless *u*.*e* in os
- odvodené vlastnosti pre user os:
  - *u*.*t* unless *u*.*h* in user os (dn3)
  - *u*.*h* unless *u*.*e* in user os (dn4)
  - *u*.*e* unless *u*.*t* in user os (dn5)

Večerajúci filozofi 5

- Dôkaz odvodenej vlastnosti pre user (stable $\neg u.e$):

$u.t$ unless $u.h$ in user /* (udn1) */
$u.h$ unless false in user /* def. stable pre (udn2) */
$u.t \vee u.h$ unless false in user /* tranzitivita pre unless */
$u.t \vee u.h \equiv \neg u.e$ /* práve jedna z hodnôt */
$\neg u.e$ unless false in user $\equiv$ stable $\neg u.e$ in user

- V ďalšom ideme špecifikovať vlastnosti os; teda všetko bude pre os, ak nebude výslovne uvedené inak

Večerajúci filozofi: Spec1

Prvé priblíženie k riešeniu: Spec1

- (odn1), (odn2), (odn3), (odn4), kde
  - invariant $\neg(u.e \wedge v.e \wedge E[u, v])$ (odn3)
  - (dn1), (dn3)–(dn5), $\langle \forall u :: u.e \rightarrow \neg u.e \rangle$ / (odn4)
    $\langle \forall u :: u.h \rightarrow u.e \rangle$

- musíme ukázať, že:
  - user os spĺňa (dn1), (dn2)
  - os spĺňa obmedzenia (odn1), (odn2)

Večerajúci filozofi: Spec1

- Dôkaz:
  - (dn3) – (dn5) platí, lebo (odn1), (odn2) platí v os a (udn1) – (udn3) platí pre user
  - $\neg(u.e \wedge v.e \wedge E[u, v])$ je stable in user lebo $\neg u.e$ aj $\neg v.e$ sú stable in user a $E[u, v]$ je constant
  - (dn1) platí v user □ os z predchádzajúceho a z (odn3) v os
  - $\langle \forall u :: u.e \rightarrow \neg u.e \rangle$ platí v user □ os lebo toto je dôsledok (udn4) a hypotézy (udn4) – (dn1) platí v user □ os
  - $\langle \forall u :: u.h \rightarrow u.e \rangle$ platí v user □ os, lebo je to dôsledok (odn4) a predpoklad (odn4) platí
  - (dn1) platí v user □ os z predchádzajúceho

Večerajúci filozofi: Spec2

- Problém s implementovaním Spec1:
  - hladný je (eats), ak nejedia susedia – spĺňa to (odn3)
  - problém je zabezpečiť (odn4), pretože jeden proces môže stále opakovať $t \to h \to e \to t \to h \to e \to \ldots$
- Riešenie:
  - zavedieme asymetriu medzi procesmi – usporiadanie
  - hladný buď začne jesť alebo postúpi v usporiadaní nahor, až kým nie je navrchu
  - čiastočné usporiadanie dostaneme tak, že v pôvodnom grafe G orientujeme hrany (aby nevznikol cyklus), čím dostaneme nový graf G'

    $u \to v$ iff u je vyššie (má vyššiu prioritu) ako v
  - orientácia je dynamická a chceme, aby platilo:

(a) G' je acyklický

(b) hladný proces nikdy neklesne zmenami orientácií

(c) hladný nakoniec vždy stúpa v usporiadaní, až dosiahne vrchol

Večerajúci filozofi: Spec2

- Pravidlá pre zmenu orientácie *G′*:
  1. Hrana zmení orientáciu len keď odpovedajúci vrchol zmení stav z hladný na *eating*
  2. $\forall$ hrany incidentné s *eating* smerujú k nemu – teda tento vrchol je nižšie v usporiadaní než susedia
- Ľahko vidno, že pravidlá 1. a 2. zabezpečia platnosť (a), (b), (c).

prior[*u*, *v*] = *u*, ak *u* je vyššie než *v* v grafe *G′*
(t.j. $u \rightarrow v$)
prior[*v*, *u*] = *prior*[*u*, *v*]
$u.\text{top} \equiv \langle \forall v\colon E[u, v] \wedge v.h :: prior[u, v] = v \rangle$

Večerajúci filozofi: Spec2

Formálny popis: Spec2

(odn1)–(odn3), (odn5)–(odn8), kde

invariant $u.e \wedge E[u, v] \Rightarrow prior[u, v] = v$ (odn5)

($prior[u, v] = v$) unless $v.e$ (odn6)

invariant G' je acyklický (odn7)

(dn1, dn3–dn5), (odn5)–(odn7), $\langle \forall u :: u.e \rightarrow \neg u.e \rangle$ / (odn8)

$\langle \forall u :: u.h \wedge u.\text{top} \rightarrow \neg(u.h \wedge u.\text{top}) \rangle$

čo znamená:

- *eating* má nižšiu prioritu než susedia (odn5)
- priorita sa mení, až keď začne jesť (odn6)

Večerajúci filozofi: Spec3

Problém s implementovaním Spec2:

- zo Spec2 by sme mohli odvodiť program s jednoduchým pravidlom:
  - *hungry* proces *u* začne jesť, ak *u*.top a ak žiaden jeho sused neje. Ak začne jesť, tak *prior*[*u*, *v*] sa stane *v* pre všetkých susedov vrcholu *u*.

Toto je ale nevhodné pre distribuovanú architektúru:

hungry totiž musí najprv zistiť, či susedia nejedia

Ďalšie zjemnenie: Spec3: jeho úlohou je nahradiť (odn3), teda invariant $\neg(u.e \wedge v.e \wedge E[u, v])$, vlastnosťou, ktorá sa dá implementovať v distribuovanej architektúre.

- Zavedieme novú premennú *fork*[*u*, *v*], ktorá môže mať hodnotu *u* alebo *v*; vidlička, ktorú má len jeden zo susediacich vrcholov
- proces môže jesť, ak má všetky vidličky

Večerajúci filozofi: Spec3

- Spec3:
  (odn1), (odn2), (odn5) – (odn9), kde

  invariant $u.e \wedge E[u, v] \Rightarrow \mathit{fork}[u, v] = u$ (odn9)
  teda (odn9) nahradilo (odn3)

Veta: (odn9) $\Rightarrow$ (odn3)
Dôkaz:

$u.e \wedge v.e \wedge E[u, v] \Rightarrow u = v \wedge E[u, v]$ (z odn9)
ale $\neg(u = v \wedge E[u, v])$ keďže $\neg E[u, u]$, a teda
$\neg(u.e \wedge v.e \wedge E[u, v])$

Večerajúci filozofi: Spec4

- Ďalšie zlepšenie: Spec3 evokuje nasledovné riešenie:
  - *non-eating* proces *u* pošle vidličku, ktorú zdieľa s *v* procesu *v*, ak má tento vyššiu prioritu než *u* alebo ak *u* je *thinking*
  - *hungry* proces *u* je (eats), ak drží vidličky, ktoré zdieľa so susedmi a pre každého suseda *v* platí
    - *u* má vyššiu prioritu ako *v*
    - *v* je *thinking*

  V distribuovanej architektúre máme opäť problém určiť priority

Večerajúci filozofi: Spec4

Distribuovaná implementácia priorít: nahradíme (odn5) a (odn6) tak, aby sa dali ľahko implementovať na distribuovanej architektúre

- Neformálne (tzv. „hygienické riešenie“):
  - každej vidličke priradíme atribúty *clean*/*dirty*
  - proces *u* má prioritu nad *v*, iff vidlička, ktorú zdieľajú, je
    - 1. *clean* a má ju *u*, alebo
    - 2. *dirty* a má ju *v*
  - *eating* proces drží ∀vidličky (ktoré zdieľa so susedmi) a ∀ sú *dirty* (odn10, zodpovedá odn5)
  - proces držiaci *clean* vidličku ju stále drží a tá ostáva *clean*, až kým nezačne jesť (odn11)
  - *dirty fork* ostáva *dirty*, až kým sa nepošle preč – vtedy sa aj vyčistí (odn12, zodpovedá odn6)
  - *clean forks* držia len *hungry* (odn13)

Večerajúci filozofi: Spec4

nech *clean*[*u*, *v*]: boolean

clean[*u*, *v*] = true ≡ vidlička od *u* a *v* je *clean*, inak je *dirty*

prior[*u*, *v*] = *u* ≡ ((*fork*[*u*, *v*] = *u*) = *clean*[*u*, *v*])

Spec4: (odn1), (odn2), (odn7), (odn8), (odn10)–(odn13), kde

invariant $u.e \wedge E[u, v] \Rightarrow fork[u, v] = u \wedge \neg clean[u, v]$ (odn10)

$fork[u, v] = v \wedge clean[u, v]$ unless $v.e$ (odn11)

$fork[u, v] = u \wedge \neg clean[u, v]$ unless

$fork[u, v] = v \wedge clean[u, v]$ (odn12)

$fork[u, v] = u \wedge clean[u, v] \Rightarrow u.h$ (odn13)

čiže

- namiesto (odn5), (odn9) máme (odn10)
- namiesto (odn6) máme (odn11), (odn12)

Večerajúci filozofi: Spec4

- Motivácia pre zlepšenie: Spec4 evokuje nasledovné riešenie:
  - *non-eating* proces *u* pošle vidličku hladnému (*hungry*) susedovi *v*, ak je táto vidlička *dirty*
  - *hungry* proces *u* je (eats), ak drží $\forall$ odpovedajúce vidličky a ak pre každého suseda *v* spoločná vidlička je *clean* alebo *v* je *thinking*; ak proces je (eats), zašpiní všetky vidličky

  Problém: ako môže proces *u* zistiť, či sused *v* je hladný?

Večerajúci filozofi: Spec5

- Neformálne: navrhneme mechanizmus, ako *v* informuje suseda *u*, že je *hungry*
  - zavedieme *request-token* pre každú dvojicu; má ju buď *u* alebo *v* (práve jeden zo susedov)
  - ak *u* má aj vidličku aj *request-token* zdieľané s procesom *v*, tak *v* je hladný (odn14)

1. Poslanie *request-token* (odn15 a 16): proces *u* pošle *request-token* procesu *v*, ak
   - 1. *u* má *request-token*
   - 2. *u* nemá vidličku (*fork*)
   - 3. *u* je *hungry*
2. Poslanie vydličky (odn17 a 18): proces *u* pošle *fork v*, ak
   - 1. *u* má vidličku a *request-token*
   - 2. vidlička je špinavá
   - 3. *u* nie je *eating*

   keď sa *fork* pošle, tak sa zároveň vyčistí

Večerajúci filozofi: Spec5

3. Prechod z *hungry* do *eating* (odn19): *hungry* proces *u* je (eats), ak drží $\forall$ *fork* a ak pre $\forall$ suseda *v* spoločná vidlička je *clean* alebo *u* nemá *request-token* zdieľaný s *v*; keď *u* je (eats), zašpiní všetky vidličky, čo má (odn10)

– ak *u*.top platí, t.j. *u* nemá hladného suseda s vyššou prioritou, tak pre každého suseda s vyššou prioritou *v u* drží vidličku, ale nie *request-token*

Večerajúci filozofi: Spec5

Formálne:

- pre každú dvojicu susedov zavedieme $rt[u, v]$ s hodnotami u a v (práve jedna z nich)
- skratka $u.mayeat$ značí „u môže jesť“
- podmienka, za ktorej u posiela *request-token* procesu v, je označená $sendreq[u, v]$
- podmienka, za ktorej u posiela vidličku procesu v, je označená $sendfork[u, v]$

u má *request-token* iff $rt[u, v] = u$

$u.mayeat \equiv \langle \forall v: E[u, v]:: (fork[u, v] = u \wedge (clean[u, v] \vee rt[u, v] = v)) \rangle$

$sendreq[u, v] \equiv (fork[u, v] = v) \wedge (rt[u, v] = u) \wedge u.h$

$sendfork[u, v] \equiv$
$(fork[u, v] = u) \wedge \neg clean[u, v] \wedge (rt[u, v] = u) \wedge \neg u.e$

Večerajúci filozofi: Spec5

- Spec5: (odn1), (odn2), (odn7), (odn10)–(odn19), kde

invariant $(fork[u, v] = u) \wedge (rt[u, v] = u) \Rightarrow v.h$ (odn14)
$rt[u, v] = u$ unless $sendreq[u, v]$ (odn15)
$sendreq[u, v]$ ensures $rt[u, v] = v$ (odn16)
$fork[u, v] = u$ unless $sendfork[u, v]$ (odn17)
$sendfork[u, v]$ ensures $fork[u, v] = v$ (odn18)
$(u.h \wedge u.\ mayeat)$ ensures $\neg(u.h \wedge u.mayeat)$ (odn19)

Večerajúci filozofi: Program pre os

- Na začiatku predpokladáme, že:
  - ∀ filozofi špekulujú (∀ procesy sú *thinking*)
  - ∀ vidličky sú špinavé (∀ *fork* sú *dirty*)
  - *fork* a *request-token* sú na rôznych miestach
  - *forks* sú tak, že graf *G'* je acyklický: napr. očíslujeme procesy a *fork* dostane proces s nižším číslom
  - (vyšší index = vyššia priorita)

Večerajúci filozofi: Program pre os

Program os

always

$\langle \Box\ u :: u.mayeat = \langle \wedge v : E[u, v] ::$
$(fork[u, v] = u \wedge (clean[u, v] \vee rt[u, v] = v)) \rangle \rangle$
$\Box \langle \Box\ u, v : E[u, v] ::$
$sendreq[u, v] = ((fork[u, v] = v) \wedge (rt[u, v] = u) \wedge u.h)$
$\Box\ sendfork[u, v] = ((fork[u, v] = u) \wedge \neg clean[u, v] \wedge$
$(rt[u, v] = u) \wedge \neg u.e) \rangle$

initially

$\langle \Box\ u :: u.\text{dine} = t \rangle$
$\Box \langle \Box (u, v) :: clean[u, v] = \text{false} \rangle$
$\Box \langle \Box (u, v) : u < v :: fork[u, v], rt[u, v] = u, v \rangle$

assign

$\langle \Box\ u :: u.\text{dine} := e \text{ if } u.h \wedge u.mayeat$
$\| \langle \| v : clean[u, v] := \text{false if } u.h \wedge u.mayeat \rangle \rangle$
$\Box \langle \Box (u, v) ::\ rt[u, v] := v \text{ if } sendreq[u, v]$
$\Box\ fork[u, v], clean[u, v] := v, \text{true if } sendfork[u, v] \rangle$

end

Koordinácia schôdzí 1

- Profesori sú členmi komisií
- Každá komisia má pevný nenulový počet členov
- Profesor sa môže rozhodnúť, že sa chce zúčastniť schôdze komisie (je mu jedno ktorej)
- Čaká, až kým schôdza komisie, ktorej je členom, nezačne

Koordinácia schôdzí 2

Schôdza:

1) Môže začať, len keď všetci jej členovia čakajú
2) Dve schôdze sa nemôžu uskutočniť súčasne, ak majú spoločných členov

Predpoklad:

Schôdze netrvajú večne

Koordinácia schôdzí 3

Úloha:

Napísať protokol, ktorý zaručí, že ak všetci členovia nejakej komisie sa chcú zúčastniť schôdze, tak aspoň jeden člen sa zúčastní nejakej schôdze

- u – profesor
- x, y, - komisie
- x.mem – množina členov komisie x, x.mem $\neq$ Ø

Koordinácia schôdzí 4

- u.g = true ak u čaká
- x.co = true ak komisia x sa zišla na schôdzi a zasadá
- x,y sú susedné komisie ak

  $x.mem \cap y.mem \neq \emptyset$, E[x,y] bude označovať susednosť
- x.g = true ak všetci členovia x čakajú, t.j

  $x.g \equiv \langle \forall u: u \in x.mem :: u.g \rangle$
- $x^*.co \equiv x.co \vee \langle \exists y: E[x,y] :: y.co \rangle$

Koordinácia schôdzí 5

Daný je program prof

Ideme navrhnúť program coord(inator) tak aby program

Sync(hronizator) = prof ▯ coord

mal nasledovné vlastnosti:

Špecifikácia prof

u.g unless <∃x: u ∈ x.mem ::x.co > pr1

⌉x.co je stable pr2

(t.j. schôdzu nemôže začať prof)

Koordinácia schôdzí 6

$\langle \forall x: x.co \rightarrow \lceil x.co \rangle$ pr3

Odvodená vlastnosť pre prof

x.g unless x*.co pr4

Dôkaz: aplikácia pravidla pre jednoduchú konjunkciu na pr1

Koordinácia schôdzí 7

Špecifikácia sync

$\neg$ x.co unless x.g	sy1
$\neg$ (x.co $\wedge$ y.co $\wedge$ E[x,y])	sy2
x.g $\rightarrow$ x*.co	sy3

Obmedzenia pre coord

Zdieľané premenné medzi prof a coord sú x.co a u.g	cd1
u.g je constatnt	cd2
x.co je stable	cd3

Koordinácia schôdzí 8

prof <--- x.co, u.g ---> coord

Poznámky:

- profesor môže čakať aj potom, čo schôdza začala
- Nič sa nehovorí o tom či sa a kedy profesor zúčastní/opustí schôdzu

Koordinácia schôdzí 9

Triviálne riešenie

Program coord1
always
< □ x :: x.g = <∀u: u ∈ x.mem :: u.g >
□ x*.co ≡ x.co ∨ <∃y: E[x,y] :: y.co >>
initially
< □ x:: x.co = false >
assign
< □ x:: x.co = true if x.g ∧ ⌉ x*.co >

Koordinácia schôdzí 10

Ľahko vidno, že coord1 spĺňa cd1-cd3
Ukážeme, že ak prof spĺňa pr1-pr3 tak
sync = prof ▯ coord spĺňa sy1-sy3.

Sy1 (⎡ x.co unless x.g)

⎡ x.co unless x.g v coord1
⎡ x.co je stable v proof

Koordinácia schôdzí 11

sy2 $(\neg(x.co \wedge y.co \wedge E[x,y]))$

$\neg$ $(x.co \wedge y.co \wedge E[x,y])$ v coord1
$\neg(x.co \wedge y.co \wedge E[x,y])$ je stable v prof

sy3 $(x.g \rightarrow x^*.co)$

x.g ensures $x^*.co$ v coord1
x.g unless $x^*.co$ pr4

Problém s implementáciou coord1 – nevieme bez centrálneho riadenia

Koordinácia schôdzí 12

- Problém pripomína večerajúcich filozofov
- komisia ..... filozof
- dve susedné komisie nemôžu zasadať .... susední filozofi nemôžu jesť
- len tá komisia, ktorá „konzumuje“ môže zasadať – x.co => x.e

Koordinácia schôdzí 13

-------user--------------

prof <- x.co, u.g -> middle <- x.co, u.g -> os

---------coord-----------

sync = prof ⊓ middle ⊓ os

user a os sú z večerajúcich filozofov

usr = prof ⊓ middle

coord = middle ⊓ os

Koordinácia schôdzí 14

Špecifikácia pre user:

- *u*.*t* unless *u*.*h* in user (udn1)
- stable *u*.*h* in user (udn2)
- *u*.*e* unless *u*.*t* in user (udn3)

user a os zdieľajú len x.dine

v os x.t je constant a

x.e je stable

Pre návrh middle musíme určiť prechody:

1) $t \rightarrow h$

2) $e \rightarrow t$

Koordinácia schôdzí 15

- ak je komisia v stave t tak sa stane h iba ak všetci jej členovia čakajú
- ak prof middle bude spĺňať user tak z riešenia filozofov vieme, že hladná komisia bude nakoniec jesť
- niektorí členovia komisie nemusia čakať v okamihu keď táto začne jesť – môžu sa zúčastniť inej schôdze medzi $h \rightarrow e$

Koordinácia schôdzí 16

Program middle1
always
< □ x :: x.g = <∀u: u ∈ x.mem :: u.g >

initially
< □ x:: x.co = false >

assign
<□ x::
x.dine := h if x.t ∧ x.g □
x.dine := t if x.e ∧ ⌉ x.co >

Koordinácia schôdzí 17

Program os1

transformujeme príkazy os (z filozofov) tak aby sa vykonal nasledovný príkaz vždy keď sa zmení hodnota u.dine z h na e

x.co := x.g

Musíme ukázať že:

middle ⊑ os1 spĺňa cd1-cd3

prof ⊑ middle spĺňa požiadavky na user

sync1 = prof ⊑ middle ⊑ os1 spĺňa „sync"

Koordinácia schôdzí 18

Lema 1. x.co => x.e v sync1

(t.j. nemôžu sa konať naraz susedné schôdze)

Dôkaz.

Na začiatku x.co = false a teda x.co => x.g platí. Keďže

x.co => x.e ≡ ⌉ x.co v x.e , stačí ukázať, že

⌉ x.co v x.e je stabilné v prof, middle a os1. Jediný zaujímavý prípad je os1. ⌉ x.co unless x.e ale x.e je stabilné v os1 a z toho ⌉ x.co v x.e je stabilné v os1

Koordinácia schôdzí 19

middle □ os1

z textu vidno, že to spĺňa cd1-cd2. Ukážeme že aj cd3 (x.co je stable)

z prechádzajúcej lemy vieme, že ⌉x.e=>⌉x.co

x.co sa nemení v middle a v os1 by sa mohlo zmeniť len ak by sa zmenilo x.e čo sa nemôže

Koordinácia schôdzí 20

prof ▯ middle (= usr)

udn1-udn3 platia lebo platia v middle a v prof sa nemení x.dine,
udn4 (x.e $\rightarrow$ ⌉x.e) plynie z pr3

prof ▯ middle ▯ os1 (= sync)

z podmienok pre filozofov vieme:

$<\forall x,y: E[x, y]:: \lceil(x.e \wedge y.e)>$	sy4
$x.h \rightarrow x.e \wedge (x.co = x.g)$	sy5
$x.e \rightarrow \lceil x.e$	sy6

sy1-sy3 sa z tohto ľahko ukážu.

Koordinácia schôdzí 21

Ideme „počítať“ u.g na asynchrónnej architektúre

u.g sa môže vyhodnotiť asynchrónne hlasovaním pre každé u.g, u $\in$ x.mem keď sa realizuje prechod $h \rightarrow e$

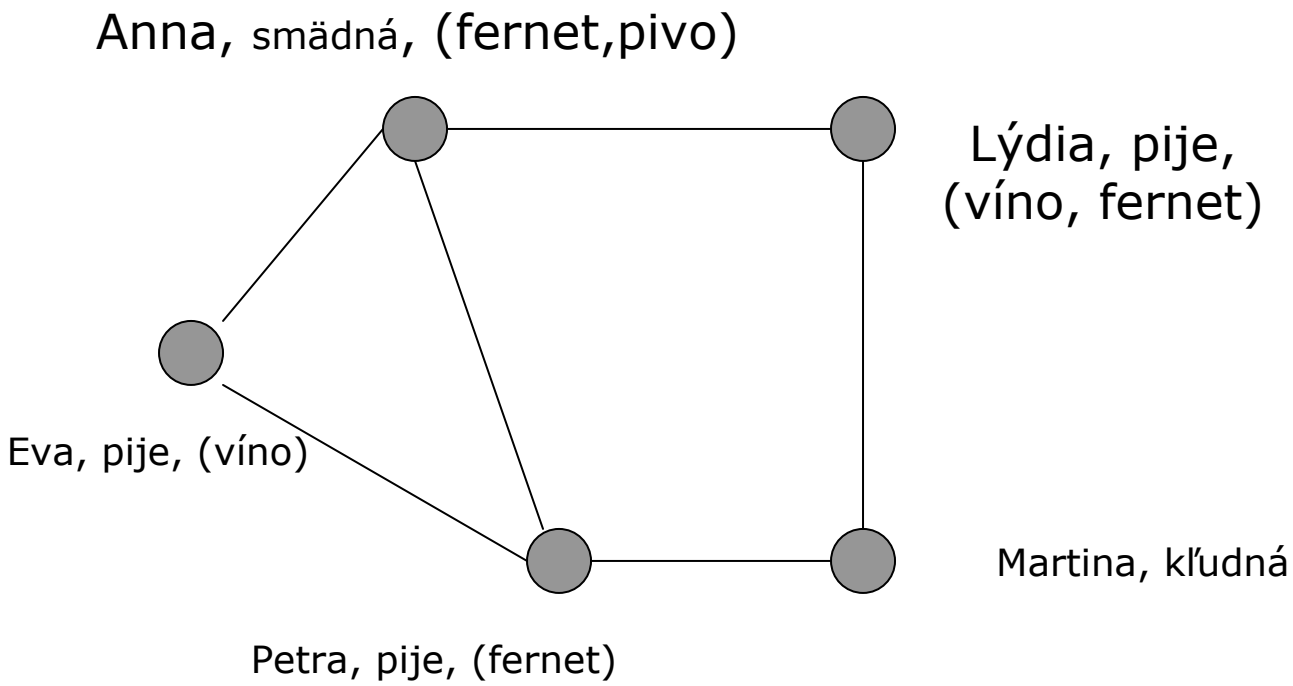
- x.prp : boolean – výsledok hlasovania
- x.prp je true ak u.g. je true pre všetkých doteraz hlasujúcich
- hlasovanie končí, ak x.prp je false alebo všetci hlasovali

Pijúci filozofi 1

G=(V,E) neorientovaný, konečný, súvislý graf bez slučiek
filozof – môže byť v 3 stavoch:
kľudný,smädný, pijúci.
stavy mení v poradí:
kľudný $\rightarrow$ smädný $\rightarrow$ pijúci $\rightarrow$ kľudný

každému smädnému alebo pijúcemu (=nekľudnému) filozofovi je priradená nejaká množina nápojov (v okamihu prechodu z kľudný do smädný), ktorá sa pokiaľ je filozof nekľudný nemení.
Úloha:
(1) zabezpečiť aby susední filozofi nepili ak majú spoločný nápoj
(2) každý smädný bude raz piť za predpokladu, že nikto nepije večne

Pijúci filozofi 2



Pijúci filozofi 3

- situácia sa líši od večerajúcich filozofov – susedia môžu piť naraz, ak pijú rôzne nápoje, komu dať prednosť ak dopijú a opäť dostanú obaja smäd?
- „stav“ filozofa sa bude meniť v dvoch cykloch kľudný $\rightarrow$ smädný $\rightarrow$ pijúci $\rightarrow$ kľudný a thinking $\rightarrow$ hungry $\rightarrow$ eating $\rightarrow$ thinking

stav bude dvojica (stav_večerajúci, stav_pijúci)

Pijúci filozofi 4

Nemôžeme ovplyvniť prechody:

(x,kľudný) → (x,smädný)

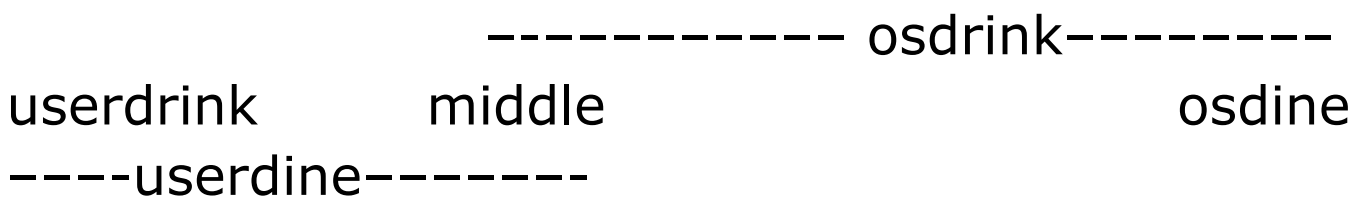
(x,pijúci) → (x, kľudný) pre ľubovolný „večerajúci stav“ x

Predpokladáme, že:

1. (thinking, smädný) sa stane hungry alebo pijúci
2. hladný bude raz jesť (ak nikto neje večne)
3. konzumujúci a smädný sa stane meditujúcim a pijúcim, konzumujúci a nesmädný sa stane meditujúcim alebo smädným

Pijúci filozofi 5

ideme navrhnúť osdrink
dané je userdrink



osdine ..... je os z večerajúcich filozofov
userdine ... je user z večerajúcich filozofov

bar = userdrink ▯ osdrink

u.k (kľudný), u.s (smädný), u.p (pijúci)
u.nap – množina nápojov pridelená u

Pijúci filozofi 6

Špecifikácia userdrink

- u.k unless u.s udr1
- u.s je stable udr2
- u.p unless u.k udr3
- u.nap = N unless u.k udr4
- invariant u.nap = Ø ≡ u.k udr5
- $\forall u : u.p \rightarrow \lceil u.p$ udr6

udr4 - ak je u nekľudný, množina nápojov sa nemení a tá je prázdna ak je kľudný udr5

Odvodená vlastnosť: $\lceil$ u.p je stable

Pijúci filozofi 7

Špecifikácia bar

invariant $\neg(u.p \wedge u.v \wedge E[u,v] \wedge (u.nap \cap v.nap \neq \emptyset))$ dr1

$u.s \rightarrow u.p$ dr2

Obmedzenia pre osdrink

u.k, u.nap =N sú constatnt odr1

u.p je stable

odr2

Odvodené vlastnosti pre osdrink

$\neg$ u.s je stable odr3

u.s unless u.p odr4

Pijúci filozofi 8

Odvodené vlastnosti bar

u.k unless u.s	dr3
u.s unless u.p	dr4
u.p unless u.k	dr5
u.nap = N unless u.k	dr6
invariant u.nap = Ø ≡ u.k	dr7
u.p $\rightarrow$ ⌉ u.p	dr8

Pijúci filozofi 9

userdrink	middle	osdine
k $\rightarrow$ s	s $\rightarrow$p	
p $\rightarrow$ k		
	t $\rightarrow$h	h $\rightarrow$e
	e $\rightarrow$t	

Pijúci filozofi 10

Špecifikácia middle

u.k, u.nap =N sú constatnt	mdr1
u.p je stable	mdr2
u.t unless u.h	mdr3
u.h je stable	mdr4
u.e unless u.t	mdr5
invariant ⌉(u.p ∧ u.v ∧ E[u,v] ∧ (u.nap ∩v.nap ≠Ø))	mdr6
(u.t ∧ u.s) ensures ⌉(u.t ∧ u.s)	mdr7
(u.e ∧ ⌉ u.s) ensures ⌉(u.e ∧ ⌉ u.s)	mdr8
dr3-7, dr8, <∀u : u.p → ⌉ u.p>	mdr9

<∀u : u.e ∧ u.s → u.t ∧ u.p>

Pijúci filozofi 11

Prechod zo stavu smädný do pijúci

smädný u začne piť ak pre každého z jeho susedov platí:

1) u konzumuje a v nepije nápoj, ktorý potrebuje u

alebo

2) nie je konflikt v nápojoch medzi u a v

Pijúci filozofi 12

Ideme zaručiť ako implementovať požiadavku, že v nepije niečo z u.nap.

Fľaškové riešenie:
pre každý nápoj máme fľašku (analógia s fork) a má ju u alebo v

bot[u,v,n] má hodnotu u alebo v – spoločná fľaška medzi u a v s nápojom n

Pijúci filozofi 13

Nová špecifikácia middle

mdr1-5, mdr7-9 a

invariant

$u.p \Rightarrow < \forall n,v:\ n \in u.nap \wedge E[u,v] :: bot[u,v,n] = u >$ mdr10

Presun fľašky

smädný proces u získa fľašku s nápojom n, ktorú zdiela s v ak:

1) v ju nepotrebuje ($n \notin v.nap$)

alebo

2) u konzumuje a v nepije

Pijúci filozofi 14

Prechod zo smädný do pijúci

smädný začne piť ak $\forall$n $\in$u.nap a pre všetkých susedov v spoločnú fľaša pre nápoj n má u a v nekonzumuje a nepotrebuje n

Problémy:

musíme zistiť či v nekonzumuje a či n $\notin$ v.nap

Riešenie:

Zavedieme request-bottle token (rb), pomocou ktorého proces informuje suseda, že potrebuje fľašu

Pijúci filozofi 15

u.t $\wedge$ u.s neostane taký navždy – buď začne byť u hladný alebo začne piť (mdr7)

u.e $\wedge$ $\neg$ u.s neostane taký navždy – buď začne u meditovať alebo začne biť smädný (mdr8)

prechod z u.e $\wedge$ u.s je u.t $\wedge$ u.p (mdr11)

smädný u začne piť ak $\forall$n $\in$u.nap a $\forall$ v E[u,v]:

- u drží fľašku n ktorú zdiela s v
- u drží fork, ktorú zdieľa s v alebo u nemá rb pre fľašku (mdr12-3)

Pijúci filozofi 16

poslanie fľašky

u pošle fľašku, ktorú zdieľa s v ak ju u má a má aj rb a u ju nepotrebuje (n $\notin$ v.nap) alebo u nepije a u nemá vidličku, ktorú zdieľa s v (mdr14-15)

poslanie rb

u pošle rb pre fľašku n ak u ho má ale nemá fľašku a u je smädný (mdr16-17)

Pijúci filozofi 17

$u.maydrink \equiv$

$< \forall n,v:\ n \in u.nap \wedge E[u,v] :: bot[u,v,n] = u \wedge$

$(rb[u,v,n]=v \vee fork[u,v]=u)>$

$sendbot[u,v,n] \equiv$

$bot[u,v,n]=u \wedge rb[u,v,n] =u \wedge$

$[n \notin v.nap \vee (fork[u,v]=v \wedge \lceil u.p)]$

$sendreq[u,v,n] \equiv (rb[u,v,n]=u \wedge bot[u,v,n]=v \wedge n \in u.nap)$

Pijúci filozofi 18

špecifikácia middle

(u.t $\wedge$ u.s) unless (u.t $\wedge$ u.p)	mdr11
u.s unless u.s $\wedge$ u.maydrink	mdr12
(u.s $\wedge$ u.maydrink) ensures $\neg$(u.s $\wedge$ u.maydrink)	mdr13
bot[u,v,n]=u unless sendbot[u,v,n]	mdr14
sendbot[u,v,n] ensures $\neg$ sendbot[u,v,n]	mdr15
rb[u,v,n]=u unless sendreq[u,v,n]	mdr16
sendreq[u,v,n] ensures $\neg$ sendreq[u,v,n]	mdr17

Pijúci filozofi 19

Program middle

initially

⟨ □ *u*:: *u*.dine, u.drink = *t, k* ⟩

assign

⟨ □ *u*:: *u*.dine := *h* if *u.t* ∧ *u*.s

~ t if u.e ∧ ⌉ *u*.s ⟩

□ ⟨ □*u*: u.drink := p if u.s ∧ u.maydrink

|| u.dine := t if u.s ∧ u.maydrink ∧ u.e ⟩

□ ⟨ □*u*, *v*,n: E[u,v]::

bot[u,v,n] := *v* if sendbot[*u*, *v*, *n*]

□ *rb*[*u*, *v*,*n*] := *v* if sendreq[u,v,n] ⟩

end

Triedenie 1

Zadanie: $x[1..N]$ of integer (*navzájom rôzne*)

Úloha: nájsť pole $y[1..N]$ také, že

y je permutáciou $x \wedge \langle\, \forall i\colon 1 \le i < N :: y[i] < y[i+1] \,\rangle$ (1)

Dve základné stratégie:

- redukcia počtu zle usporiadaných dvojíc
- utriedenie časti poľa

Triedenie 2

1. Reduckia počtu zle usporiadaných dvojíc

(zatiaľ nešpecifikujeme, koľko dvojíc sa permutuje v každom kroku, v akom poradí sa permutujú a pod.)

- zaveďme metriku

  $M = \langle +i, j: 0 < i < j \leq \mathrm{N}: y[i] > y[j] :: 1 \rangle$

- stratégia je formálne definovaná nasledujúcim invariantom, FP a progress podmienkou:

  invariant y je permutáciou x (2)

  $\mathrm{FP} \equiv (M = 0)$ (3)

  $\langle \forall k: k > 0 :: M = k \rightarrow M < k \rangle$ (4)

- Dôkaz správnosti: stačí ukázať, že platí

  $(2) \wedge (3) \wedge (4) \Rightarrow \mathrm{true} \rightarrow \mathrm{FP}$

  a že (1) platí v každom FP.

Triedenie 3

2. Utriedenie časti poľa

budeme používať premennú m, $1 \le m \le \mathrm{N}$ a v každom bode výpočtu bude platiť

(*a*) $y[m + 1 \,..\, \mathrm{N}]$ je utriedené

t.j. $\langle \wedge\, i, j : m < i < j \le \mathrm{N} :: y[i] < y[j] \rangle$

(b) všetky prvky $y[1 \,..\, m]$ sú menšie než prvky $y[m + 1 \,..\, \mathrm{N}]$

t.j. $\langle \wedge\, i, j : 1 \le i \le m < j \le \mathrm{N} :: y[i] < y[j] \rangle$

keď zlúčime (*a*) a (*b*) dohromady, dostaneme

$\langle \wedge\, i, j : 1 \le i < j \le \mathrm{N} \wedge m < j :: y[i] < y[j] \rangle$

na začiatku $m = \mathrm{N}$ to zaručuje a ak chceme znížiť m, tak musíme permutovať $y[1 \,..\, m]$ tak, aby pre nejaké k, $1 < k \le m$, pole $y[k \,..\, m]$ bolo utriedené a elementy tohoto poľa $y[k \,..\, m]$ boli väčšie než prvky poľa $y[1 \,..\, k - 1]$; potom položíme $m := k - 1$

Triedenie 4

Formálne:

invariant y je permutáciou x

$\wedge\ 1 \leq m \leq \mathrm{N}$

$\wedge \langle \wedge i, j: 1 \leq i < j \leq \mathrm{N} \wedge m < j :: y[i] < y[j] \rangle$ (5)

$\mathrm{FP} \equiv\ (m \leq 1)$ (6)

$\langle \forall k: k > 1:: m = k \rightarrow m < k \rangle$ (7)

Dôkaz správnosti: cvičenie.

Triedenie – Jednoduché riešenia 1

- budeme uvádzať len assign sekciu a predpokladať, že
  initially $\langle \,||\, i\colon 1 \le i \le \mathrm{N} :: y[i] = x[i] \,\rangle$

1. Reduckia počtu zle usporiadaných dvojíc

- Program P1
  assign
  $\langle \,[]\, i\colon 1 \le i < \mathrm{N} ::$
  $y[i] := \min(y[i], y[i+1])$
  $||\quad y[i+1] := \max(y[i], y[i+1]) \,\rangle$
  end{P1}

alebo

Triedenie – Jednoduché riešenia 2

Program P1’

assign

$\langle \Box\, i: 1 \le i < N ::$

$y[i], y[i+1] := \text{sort2}(y[i], y[i+1])$

end{P1’}

pričom funkcie min, max a sort2 majú nasledovný význam:

min: $2^N \to N$; vráti minimum množiny prirodzených čísel

max: $2^N \to N$; vráti maximum množiny prirodzených čísel

sort2: $N \times N \to N \times N$; vráti usporiadanú dvojicu čísel

napr. min(7, 5, 1976) = 5, max(7, 5, 1976) = 1976, sort2(7, 5) = (5, 7)

Triedenie – Jednoduché riešenia 3

2. Utriedenie časti poľa

Nech *f* je funkciou *y* a *m* taká, že vráti index najväčšieho prvku *y*[1 .. *m*]. P2 vymení prvky *y*[*m*] a *y*[*f*(*y*, *m*)] a zníži *m* o jednotku.

Program P2

declare

x: integer

always

x = *f*(*y*, *m*) { teda $y[x] \geq y[i]$, $1 \leq i \leq m$ }

initially

m = N

assign

y[*m*], *y*[*x*], *m* := *y*[*x*], *y*[*m*], *m* – 1 if *m* > 1

end{P2}

Triedenie – Sekvenčné architektúry 1

Priame zobrazenie na SA dáva:

- P1: má N – 1 príkazov, ktoré sa vykonávajú v cykle cez rastúce *i*, celý program potrebuje $O(N^2)$ krokov
- P2: podobne

V nasledujúcom ukážeme lepšiu realizáciu P1 a P2 na SA.

Z P2 odvodíme heapsort, zložitosť $O(N.\log N)$ krokov.

Jadrom je zefektívnenie výpočtu maxima poľa $y[1 .. m]$.

Prvky $y[1 .. m]$ dáme do haldy tak, že $y[1]$ je maximum.

Triedenie – Sekvenčné architektúry 2

Program skeleton–heapsort
declare
m: integer
initially
$m = N$
assign
$y[m], y[1], m := y[1], y[m], m - 1$
if $y[1] = \langle \max j: 1 \leq j \leq m :: y[j] \rangle \wedge m > 1$
 príkazy na permutáciu $y[1 .. m]$ tak, že $y[1]$ je maximum
end

Triedenie – Sekvenčné architektúry 3

strom: $y[i]$ má synov $y[2i]$ a $y[2i + 1]$ (a opačne *byť_synom*)

potomok: nereflexívny tranzitívny uzáver relácie *byť_synom*

zavedieme pole $top[1 .. N]$ of boolean,

$top[i] \Rightarrow$ $y[i]$ je väčšie ako $y[j]$,

kde j je potomok i a $1 \le j \le m$

formálne:

invariant

$$\langle\ \forall\ i, j\colon 1 \le i \le m \wedge j \le m \wedge j \text{ je potomok } i \wedge top[i] :: y[i] > y[j]\ \rangle \qquad (8)$$

teda $\frac{m}{2}$

$$top[1] \Rightarrow y[1] = \langle\ \max j\colon 1 \le j \le m :: y[j]\ \rangle.$$

Triedenie – Sekvenčné architektúry 4

- Budeme používať nasledujúci
  invariant
  $$\langle\ \forall\ i:\quad m/2\ <\ i \le N :: top[i]\ \rangle \qquad (9)$$
  teda $top[i]$ platí pre všetky listy a usporiadanú časť y.

- Predpokladajme, že N je nepárne.

- Myšlienka: ak $top[2i]$ a $top[2i + 1]$ platia, tak $top[i]$ bude platiť, ak $y[i] := \max(y[i], y[2i], y[2i + 1])$.
- Nech $l[i]$ označuje index toho syna i, ktorý je väčší, ak i nemá syna, potom $l[i] = 2i$

Triedenie – Sekvenčné architektúry 5

- Program P3 {nedeterministický heapsort}

declare

l: array [1 .. N] of integer

top: array [1 .. N] of boolean

always

$\langle \Box\ i: 1 \le i \le N ::$

$l[i] = \quad 2i + 1 \quad$ if $y[2i + 1] > y[2i] \wedge 2i + 1 \le m \sim$

$\quad\quad\quad 2i \quad\quad$ if $\neg(y[2i + 1] > y[2i] \wedge 2i + 1 \le m)$

$\rangle$

initially

$\langle \Box\ i: 1 \le i \le N :: top[i] = (2i > N) \ ||\ y[i] = x[i] \rangle \Box\ m = N$

assign

$y[m], y[1], m := y[1], y[m], m - 1$ if $top[1] \wedge m > 1$

$||\quad\quad top[1], top[\lceil m/2 \rceil] :=$ false, true if $top[1] \wedge m > 2$

$\Box$ { usporiadanie $y[l[i]]$ a $y[i]$, ak $top[2i]$ a $top[2i + 1]$ }

$\langle \Box\ i: 1 \le i \le N/2::$

$y[l[i]], y[i], top[i], top[l[i]] :=$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ sort2($y[l[i]], y[i]$), true, $(2.l[i] > m)$

$\quad\quad\quad$ if $(2i \le m) \wedge \neg top[i] \wedge top[2i] \wedge top[2i + 1] \rangle$

end{P3}

Triedenie – Sekvenčné architektúry 6

- Dôkaz. Musíme ukázať, že P3 spĺňa (5), (6), (7). Z textu programu zrejme platia (5), (8), (9).
- Dôkaz (7): $\langle\ \forall k\colon k > 1 :: m = k \rightarrow m < k\ \rangle$

  Ukážeme, že platí

  $$\text{true} \rightarrow top[1] \qquad (10)$$

  $$m = k \text{ unless } m < k \qquad (11)$$

  $$m = k \wedge k > 1 \wedge top[1] \rightarrow m < k \qquad (12)$$

  Potom $m = k \rightarrow (m = k \wedge top[1]) \vee m < k$ z PSP aplikované na (10), (11) a z predchádzajúceho a (12) máme

  $$m = k \wedge k > 1 \rightarrow m < k$$

  (11) a (12) platia priamo z P3, ostáva dokázať (10).

Triedenie – Sekvenčné architektúry 7

Dôkaz (10): true $\rightarrow$ *top*[1]

Zavedieme metriku

$d = \langle +i$: *top*[*i*]:: počet vrcholov v podstrome s koreňom *i* $\rangle$

Vykonaním príkazu, ktorý položí *top*[*i*] := true pre nejaké *i* sa zvýši hodnota *d* (lebo podstrom s koreňom jeho synom je menší)

Teda máme

$d = D$ ensures *top*[1] $\vee$ $d > D$

avšak hodnota *d* je ohraničená, teda

true $\rightarrow$ *top*[1]

Dôkaz (6): FP $\equiv$ $(m \leq 1)$

$m > 1 \rightarrow m \leq 1$ /* zo (7) */

Ak $p \rightarrow q$, vieme, že platí FP $\Rightarrow (p \Rightarrow q)$, teda ak $p \rightarrow \neg p$, vieme, že FP $\Rightarrow \neg p$. Nech $p \equiv m > 1$, potom FP $\Rightarrow m \leq 1$. Z textu programu vieme, že $m \leq 1 \Rightarrow$ FP.

Triedenie – Paralelné architektúry (synchrónne) 1

zistíme, čo sa dá vykonať paralelne

Program P4

assign

$\langle \,||\, i\colon 1 \le i < \mathrm{N} \wedge \mathrm{even}(i) :: y[i], y[i+1] := \mathrm{sort2}(y[i], y[i+1]) \,\rangle$

$\square \langle \,||\, i\colon 1 \le i < \mathrm{N} \wedge \mathrm{odd}(i) :: y[i], y[i+1] := \mathrm{sort2}(y[i], y[i+1]) \,\rangle$

end{P4}

$O(\mathrm{N})$ procesormi vykonanie P4 trvá $O(\mathrm{N})$. Nasledujúci program priamo „počíta“ kroky.

Triedenie – Paralelné architektúry (synchrónne) 2

Program P5

declare m: integer

initially $k = 0 \;\square\; y[0] = -\infty \;\square\; y[N + 1] = \infty$

assign

$\langle \;||\; i: 1 \le i \le N :: y[i] := \min(y[i], y[i + 1]) \text{ if } (i = k \bmod 2) \sim \max(y[i], y[i - 1]) \text{ if } (i \ne k \bmod 2) \rangle$

$||\quad k := k + 1 \text{ if } k < N$

end{P5}

Triedenie – Rank sort 1

pre každý prvok z *y* vypočítame počet prvkov menších alebo rovných v *y* – táto hodnota je poradové číslo (pozícia) tohoto prvku v usporiadanom *y*

Program P6

declare *r*: array[1 .. N] of integer

always

$\langle \,||\, i\colon 1 \le i \le N :: r[i] = \langle \,+j\colon 1 \le j \le N \wedge x[j] \le x[i] :: 1 \rangle \,\rangle$

$\Box\, \langle \,||\, i\colon 1 \le i \le N :: y[r[i]] = x[i] \,\rangle$

end{P6}

Triedenie – Rank sort 2

Dôkaz: treba ukázať nasledujúce tri vlastnosti programu P6:

1. rovnosti sú proper
2. y je permutácia x
3. y je usporiadané

Výraz $\langle +j\colon 1 \le j \le \mathrm{N} \wedge x[j] \le x[i] :: 1 \rangle$ možno vypočítať v čase $O(\log \mathrm{N})$ s $O(\mathrm{N})$ procesormi.

Takže všetky $r[i]$ možno vypočítať v čase $O(\log \mathrm{N})$ s $O(\mathrm{N}^2)$ procesormi.

Alebo v čase $O(\mathrm{N})$ s $O(\mathrm{N})$ procesormi, ak jeden procesor ráta $r[i]$, a to v čase $O(\mathrm{N})$.

Protokol na komunikáciu cez chybové kanály (Faulty channels)

proces sender má prístup k nekonečnej postupnosti dát *ms*

proces receiver: jeho výstupom je postupnosť *mr*, ktorá spĺňa nasledovnú špecifikáciu:

invariant $mr \subseteq ms$

$|mr| = n \rightarrow |mr| = n + 1$

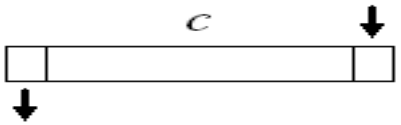
Faulty channels 2

- ak procesy komunikujú cez neohraničený spoľahlivý kanál, riešenie je jednoduché:

  $c, ms := c;\ \text{head}(ms), \text{tail}(ms)$ {sender}

  ▯ $c, mr := \text{tail}(c), mr;\ \text{head}(c)$ if $c \neq null$ {receiver}

kde initially $c = mr = null$ a $\text{head}(p); \text{tail}(p) \equiv p$.



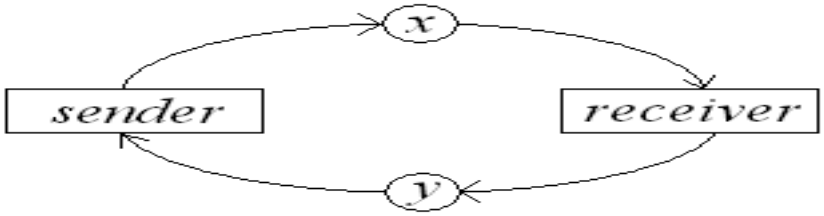
Faulty channels 3

budeme riešiť problém, ak *c* je chybné – správa môže byť stratená alebo duplikovaná, ale len *konečne veľa ráz*

zjednodušený problém:

sender a *receiver* komunikujú cez zdieľané premenné *x* a *y*:

- *sender* píše do *x* a číta *y*
- *receiver* píše do *y* a číta *x*



Faulty channels 4

- správa je stratená, ak *sender* zapíše do *x* prv, než to *receiver* prečítal
- správa je zduplikovaná, ak *receiver* znova číta *x* bez toho, že by sa medzitým obsah *x* zmenil
- podobne platí strata/duplikovanie pre *y*
- predpokladáme, že sender posiela postupnosť 1, 2, 3… (teda správy očíslujeme a namiesto správ posielame len ich čísla)
- nech

  ks – posledné číslo poslané *sender*om

  kr – posledné číslo prijaté *receiver*om
- initially $ks = 1 \wedge kr = 0$
- invariant $kr \leq ks$ {prijíma sa len to, čo bolo poslané}
- $kr = n \rightarrow kr = n + 1$ {nakoniec sa prijmú všetky správy}

Faulty channels 5

- požadovaný program musí spĺňať túto špecifikáciu a naviac jeho príkazy sa dajú rozdeliť do dvoch skupín (pre *sender* a *receiver*):

  - *ks* vie čítať a písať len *sender* (sRW)
  - *kr* vie čítať a písať len *receiver* (rRW)
  - *x*, *y* sa môžu vyskytovať v oboch skupinách
  - do *x* vie priraďovať len *sender*
  - do *y* vie priraďovať len *receiver*

Faulty channels 6

zjemníme progress podmienku:

$$kr = n \rightarrow ks = n + 1 \rightarrow kr = n + 1$$

to sa zabezpečí príkazom

$$ks := kr + 1 \; \square \; kr := ks$$

pritom však toto nespĺňa podmienky (sRW) a (rRW)

opäť zjemníme progress podmienku:

$$kr = n \rightarrow y = n \rightarrow ks = n + 1 \rightarrow y = n + 1 \rightarrow kr = n + 1$$

- Program P1

  declare x, y, ks, kr: integer

  initially x, y, ks, kr = 1, 0, 1, 0

  assign

  $y := kr$ {*receiver*}

  $\square$ $ks := y + 1$ {*sender*}

  $\square$ $x := ks$ {*sender*}

  $\square$ $kr := x$ {*receiver*}

  end{P1}

Faulty channels 7

x je chybový kanál, cez ktorý sa posiela ks
y je chybový kanál, cez ktorý sa posiela potvrdenie
invariant $y \leq kr \leq x \leq ks \leq y + 1$ (I1)

Dôkaz:

- na začiatku (I1) platí
- každé priradenie $a := b$ spĺňa $a \leq b$,
  a teda vykonanie $a := b$ zachová $a \leq b$

Faulty channels 8

progress podmienka

$kr = n \rightarrow y = n \rightarrow ks = n + 1 \rightarrow y = n + 1 \rightarrow kr = n + 1$

Dôkaz: ukážeme pre $y = n \rightarrow ks = n + 1$, ostatné podobne

- $y = n$ ensures $ks = n + 1$ vyplýva z nasledovného:
- $y = n \wedge ks \neq n + 1 \Rightarrow y = kr = x = ks$ {z (I1)}
- $\{y = n\}\ ks := y + 1\ \{ks = n + 1\}$
- $\{y = n \wedge ks \neq n + 1\}\ s\ \{y = n \vee ks = n + 1\}$

Prenos ľubovoľnej postupnosti dát

ms – nekonečná postupnosť (lokálna *sender*u)

mr – nekonečná postupnosť (lokálna *receiver*u)

ms[*j*], *j* > 0 označuje *j*-ty element *ms*

do *x* sa píše dvojica *x*.dex, *x*.val

- Program P2

  declare *x*: (integer, data item), *y*, *ks*, *kr*: integer

  initially *y*, *ks*, *kr* = 0, 1, 0 ▯ *mr* = *null* ▯ *x* = (1, *ms*[1])

  assign

  y := *kr* {*receiver*}

  ▯ *ks* := *y* + 1 {*sender*}

  ▯ *x* := (*ks*, *ms*[*ks*]) {*sender*}

  ▯ *kr*, *mr* := *x*.dex, *mr* ; *x*.val if *kr* ≠ *x*.dex {*receiver*}

  end{P2}

Faulty channels 10

Správnosť P2:

invariant $mr \subseteq ms$

$|mr| = n \rightarrow |mr| = n + 1$

Pozorovanie: (I1) platí aj pre P2, kde miesto x je x.dex

označenie x.val $\in ms$ ak $\exists j : x.\text{val} = ms[j]$

platí nasledovný

invariant $x.\text{val} \in ms \wedge mr \subseteq ms \wedge |mr| = kr$ (I2)

(*Hint:* z (I1) $kr \neq x.\text{dex} \Rightarrow kr + 1 = x.\text{dex}$)

Progress podmienka má podobný dôkaz ako v P1

Poznámka. Z (I1) a *hint*u $kr := x.\text{dex}$ if $kr \neq x.\text{dex}$ možno v P2 nahradiť $kr := kr + 1$ if $kr \neq x.\text{dex}$ a zároveň možno $kr := y + 1$ nahradiť $ks := ks + 1$ if $ks = y$

Faulty channels 11

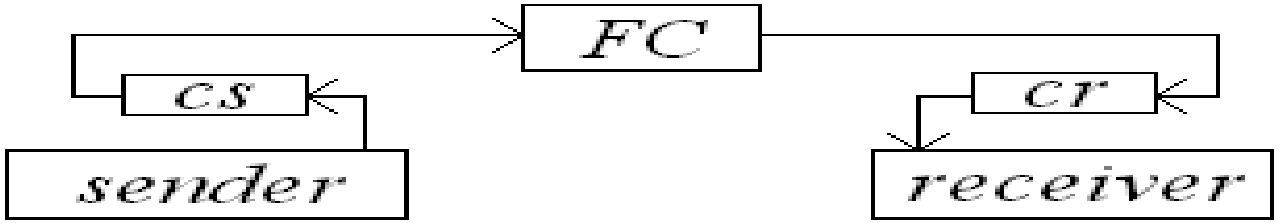
V predchádzajúcich programoch duplikovanie a strata správy boli „pod kontrolou“ *sender*a a *receiver*a

špecifikácia chybného (resp. chybového) kanála:

- každá správa môže byť konečne veľa krát stratená
- každá správa môže byť konečne veľa krát duplikovaná
- správy sú prenášané v nezmenenom poradí
- správy nemôžu byť poškodené

Faulty channels 12

situácia s chybovým kanálom FC a bezchybovými kanálmi *cs*, *cr*:



Faulty channels 13

- FC môže len odobrať (head) z *cs*

  stable *cs* je suffix cs^0

  – všeobecne kvantifikované, cs^0 je konštantná postupnosť
- FC môže pridať na koniec *cr*

  stable cr^0 je prefix *cr*
- FC môže stratiť správu z *cs* alebo duplikovať správu do *cr*

  invariant ($\underline{cs} - cs$) loss $\underline{cr}$

  – $\underline{cs}$: celá „história" cs

  – $\underline{cs} - cs$: prefix $\underline{cs}$ bez *cs*

  – *u* loss *v*: *v* je možný výstup z chybného kanála, za predpokladu, že vstup je *u*

    - (*null* loss *null*)
    - (*u* loss *v*) $\Rightarrow$ (*u*;*m* loss *v*) *strata*
    - (*u*;*m* loss *v*) $\Rightarrow$ (*u*;*m* loss *v*;*m*) *duplikácia*

Faulty channels 14

[ak správa *m* (a žiadna iná) je nekonečne veľa krát pridaná do *cs*, tak sa *m* raz (*eventually*) objaví v *cr*]

- Predpokladáme množinu predikátov *p*.*m* (predikát existuje pre každé *m*)
  - ak *p*.*m* platí, žiadne iná správa ako *m* nemôže byť pridaná do *cs*
  - *p*.*m* platí nanajvýš pre jedno *m* (počas „výpočtu“)
  - ak *p*.*m* je true, tak raz (*eventually*) bude false alebo *m* je pridané do *cs* (t.j. zvýši sa dĺžka $\underline{cs}$)
- za týchto predpokladov FC zaručí, že ak raz *p*.*m* je true, potom sa raz (*eventually*) bude rovnať false alebo *m* sa objaví v *cr*
- Predpoklad: $p.m \wedge p.n \Rightarrow m = n$

  $p.m \wedge cs = null$ unless $\neg p.m \vee cs = \langle\langle m \rangle\rangle$

  $p.m \wedge (cs = cs^0) \wedge (cs \neq null)$ unless

  $\neg p.m \vee cs = \text{tail}(cs^0) \vee cs = cs^0;m$

  $p.m \wedge |\underline{cs}| = k \mapsto \neg p.m \vee |\underline{cs}| > k$
- Záver: $p.m \rightarrow \neg p.m \vee (m \in cr)$

Faulty channels 15

- Program simulujúci FC
  - strata správy

    cs := tail(*cs*) if *cs* ≠ *null*
  - duplikácia správy

    cr := *cr*;head(*cs*) if *cs* ≠ *null*
  - správny transfér

    cs, *cr* := tail(*cs*), *cr*;head(*cs*) if *cs* ≠ *null*

  (neobsahuje predpoklad, že len *konečne veľa* chýb možno vykonať za sebou)
- zavedieme premennú *b*: boolean, ktorá značí „chyba nenastane“

Faulty channels 16

Program FC

declare b: boolean

initially b = false

assign

cs := tail(cs) if $cs \neq null \wedge \neg b$

$\Box$ cr := cr;head(cs) if $cs \neq null \wedge \neg b$

$\Box$ b, cs, cr := false, tail(cs), cr;head(cs) if $cs \neq null$

$\Box$ b := true

end{FC}

Faulty channels 17

Protokol FC pre komunikáciu s dvoma chybnými kanálmi (pre *cr*, *cs* a pre *ackr*, *acks*) má spĺňať nasledujúce podmienky:

invariant $mr \subseteq ms$

$|mr| = n \rightarrow |mr| = n + 1$

Modifikujme P2 takto:

Faulty channels 18

Program P3
declare *ks*, *kr*: integer
initially
ks, *kr* = 1, 0
 cs, *cr*, *acks*, *ackr* = *null*, *null*, *null*, *null*
 mr = *null*
assign
ackr := *ackr*;*kr*
 ks := *ks* + 1 if *acks* ≠ *null* ∧ *ks* = head(*acks*)
|| *acks* := tail(*acks*) if *acks* ≠ *null*
 cs := *cs*;(*ks*, *ms*[*ks*])
 kr, *mr* := *kr* + 1, *mr*;head(*cr*).val
if *cr* ≠ *null* ∧ *kr* ≠ head(*cr*).dex
|| *cr* := tail(*cr*)
end{P3}

Faulty channels 19

- Pri dokazovaní správnosti protokolu použijeme upravené invarianty (I1), (I2)

  invariant $y \le kr \le x.\text{dex} \le ks \le y + 1$ (I1)

  invariant $x.\text{val} \in ms \wedge mr \subseteq ms \wedge |mr| = kr$ (I2)

- (I1) sa dá prepísať (x, y môžu byť nedefinované, ak zodpovedajúce kanály sú *null*) nasledovným spôsobom:

  $\langle \forall y: y \in acks \vee y \in ackr :: y \le kr \wedge ks \le y + 1 \rangle \wedge$

  $\langle \forall x: x \in cs \vee x \in cr :: kr \le x.\text{dex} \le ks \rangle \wedge$

  $kr \le ks \le kr + 1$
- podobne sa dá prepísať aj (I2)
- potrebujeme ešte jeden invariant:

  invariant cs.dex, cr.dex, $acks$, $ackr$ sú neklesajúce postupnosti (I3)
- Úloha: dôkaz (I1), (I2), (I3) a nasledujúcej progress podmienky:

  $kr = n \rightarrow kr = n + 1$

Faulty channels 20

- Z (I1) pre P3 máme

  ak $cr \neq null$ tak $kr \leq \text{head}(cr).\text{dex} \leq kr + 1$
- teda

  $kr \neq \text{head}(cr).\text{dex} \equiv (kr \bmod 2 \neq [\text{head}(cr).\text{dex}] \bmod 2)$

  $ks = \text{head}(acks) \equiv (ks \bmod 2 = \text{head}(acks) \bmod 2)$
- P3 môže byť zjednodušené tak, že nahradíme *kr*, *ks* nasledujúcimi: $kr \bmod 2$, $ks \bmod 2$
- dostávame Alternating Bit Protocol

Global snapshots 1

Úloha: modifikovať daný program tak, aby sme mohli zaznamenať stav jeho výpočtu

toto je problémom pri asynchrónnych a distribuovaných systémoch

Príklad:

- Program P

  declare x, y, z: integer

  initially x, y, z = 0, 0, 0

  assign $x := z + 1$ □ $y := x$ □ $z := y$

  end{P}

Global snapshots 3

Podrobnejšia špecifikácia:

- pre zjednodušenie budeme predpokladať, že stav sa zaznamenáva len raz (ľahko sa to rozšíri pre viacnásobné použitie)
- transformujeme daný program tak, že potom tento zaznamená stav pôvodného programu
- *zaznamenaný stav* – stav, ktorý sa môže vyskytnúť vo výpočte, a to medzi tým, keď je zaznamenávanie (záznam) inicializované a ukončené
- zaznamenávanie je inicializované, ak premennej *begun* je priradená hodnota true
- *begun* je stable

Global snapshots 4

- nezaoberáme sa tým, kedy sa *begun* stane true
- predpokladáme, že ak *begun* sa stane true, ak v konečnom čase sa ukončí zaznamenávanie
- pod *stavom* myslíme stav (t.j. hodnoty premenných) pôvodného programu
- [*s*0] *v* [*s*1], kde *s*0, *s*1 sú stavy a *v* je konečná postupnosť príkazov, znamená: ak začneme v *s*0 a vykonáme *v*, tak skončíme v *s*1
- *init* – stav, pri ktorom je zaznamenávanie inicializované (*begun* $\leftarrow$ true)
- *rec* – stav zaznamenaný transformovaným programom

Global snapshots 2

- stavom P je trojica hodnôt x, y, z
- ľahko vidno, že jediná možná postupnosť stavov P je

  $(0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 1) \rightarrow (2, 1, 1)$
  $\rightarrow (2, 2, 1) \rightarrow \ldots$
- P spĺňa invariant

  invariant $(x \geq y) \wedge (y \geq z) \wedge (z + 1 \geq x)$
- ak hodnotu x zaznamenáme v stave (0, 0, 0) a hodnoty y a z v stave (1, 1, 0), tak zaznamenaný stav (0, 1, 0) nie je stavom žiadneho výpočtu

Global snapshots 5

- *cur* – nejaký stav, ktorý sa vyskytuje vo výpočte po tom, čo bolo zaznamenávanie ukončené
- požadujeme, aby existovali postupnosti *u*, *v* také, že

  [*init*] *u* [*rec*] $\wedge$ [*rec*] *v* [*cur*]
- stavové premenné:

  x.done – platí práve vtedy, keď *x* bolo zaznamenané
- zaznamenávanie je ukončené, ak $\forall x$ platí *x*.done
- zaznamenaná hodnota je uložená do *x*.rec
- stav *rec* je teda daný hodnotami $\langle\ \forall x ::\ x.\text{rec}\ \rangle$
- stav *cur* je daný momentálnymi hodnotami *x*

Global snapshots 6

invariant a progress podmienka:

invariant $\langle \wedge x{::}\ x.\text{done} \rangle \Rightarrow \langle\ \exists u, v{:}\ [init]\ u\ [rec] \wedge [rec]\ v\ [cur] \rangle$

$begun \rightarrow \langle \wedge x{::}\ x.\text{done} \rangle$

neformálne:

- zaznamenávanie sa skončí v konečnom čase
- [*rec*] je na nejakej „ceste" medzi [*init*] a [*cur*]

Program P1

initially $\langle\ ||x{::}\ x.\text{done} = \text{false} \rangle$

add $\langle\ ||x{::}\ x.\text{rec}, x.\text{done} = x,$ true if $begun \wedge \neg x.\text{done} \rangle$

end{P1}

P1 je vhodný pre sekvenčné počítače, nevhodný pre asynchrónne počítače

Global snapshots 7

Zjemnenie pôvodnej špecifikácie:

pre každý stav výpočtu (pôvodného programu) definujeme

x.partial = x.rec if x.done
~ x if $\neg x$.done

invariant a progress podmienka:

invariant *begun* $\Rightarrow \langle\, \exists u, v$: v obsahuje len zaznamenané premenné:: [*init*] u [*partial*] $\wedge$ [*partial*] v [*cur*] $\rangle$

begun $\rightarrow \langle\, \wedge x$:: x.done $\rangle$

Global snapshots 8

neformálne:

- *partial* je kombináciou *rec* a *cur*
  - pre zaznamenané *rec* = *partial*
  - pre nezaznamenané *cur* = *partial*
- keď sa inicializuje zaznamenávanie, *init* = *partial*
- keď sa zaznamenávanie skončí, *rec* = *partial*
- zaznamenávanie nemení *partial*
- *v* necháva *partial* nezmenený

Výpočet pre program P:

Global snapshots 9

Events	State	Zaznamenané	partial	x.rec	y.rec	z.rec
initially	0, 0, 0	–	0, 0, 0	–	–	–
zmena stavu	1, 0, 0	–	1, 0, 0	–	–	–
záznam x	1, 0, 0	x	1, 0, 0	1	–	–
záznam y	1, 0, 0	x, y	1, 0, 0	1	0	–
zmena stavu	1, 1, 0	x, y	1, 0, 0	1	0	–
záznam z	1, 1, 0	x, y, z	1, 0, 0	1	0	0
zmena stavu	1, 1, 1	x, y, z	1, 0, 0	1	0	0

Global snapshots 10

Pravidlo *R*:

- Keď sa príkaz daného programu vykoná, tak platí jedno z nasledujúcich:
  - všetky premenné v danom príkaze sú zaznamenané,
  - všetky premenné v danom príkaze sú nezaznamenané;
- hodnota *x* môže byť zaznamenaná hocikedy potom, čo bolo zaznamenávanie inicializované, a prv, než sa vykoná príkaz obsahujúci *x* a nejaké už zaznamenané hodnoty.
- Tvrdenie: Každý program, ktorý implementuje *R*, spĺňa predchádzajúci invariant.

Global snapshots 11

Neformálny dôkaz:

Invariant platí, keď inicializujeme zaznamenávanie, za *u*, *v* vezmeme *null*.

Ukážeme, že invariant sa zachová po vykonaní príkazu *t*, ktorý spĺňa *R*.

- nech všetky premenné v *t* sú nezaznamenané a platí invariant pred vykonaním *t*. *v* obsahuje len premenné zaznamenané, teda *v* a *t* nemajú spoločné premenné. Môžu byť teda vykonané nezávisle na sebe;
  - za *u* vezmime *u*;*t*
  - za *v* vezmime *v*
- nech všetky premenné v *t* sú zaznamenané; potom *partial* sa nemení;
  - za *u* vezmime *u*
  - za *v* vezmime *v*;*t*

Global snapshots 12

V okamihu, keď sa inicializuje zaznamenávanie (*begun* $\leftarrow$ true) platí

$$init = cur \wedge partial = cur$$

teda invariant platí pre $u = v = null$.

Predpokladajme, že invariant platí pre nejaké u, v a nejaký výpočet.
Budeme uvažovať 3 prípady, kedy sa môže meniť *partial* alebo *cur*.

Global snapshots 13

Prípad 1:

ak sa zaznamená premenná, tak sa nemenia hodnoty *partial* alebo *cur* a teda môžeme zobrať pôvodné *u*, *v*.

Teraz budeme uvažovať, že sa vykoná prílaz *t*. Nech *cur'* je stav pred vykonaním *t* a *cur* je stav po vykonaní *t*.

Podobne pre *partial*.

Z invariantu máme:

$$[init]\ u\ [partial']\ \wedge\ [partial']\ v\ [cur']$$

ďalej

$$[cur']\ t\ [cur]$$

Musíme nájsť *u'*, *v'* tak, aby platilo

$$[init]\ u'\ [partial]\ \wedge\ [partial]\ v'\ [cur]$$

(Vykonanie *t* neovplyvňuje *x*.done alebo *x*.rec.)

Global snapshots 14

- *Prípad 2:*

  t obsahuje nezaznamenané premenné. Potom ľahko vidno

  [*partial'*] *t* [*partial*] (**)

  a

  [*init*] *u*;*t* [*partial*]

  [*partial'*] *v*;*t* [*cur*] (*)

  t obsahuje len nezaznamenané premenné t.j. možno vymeniť poradie *t* a *v*, máme teda

  [*partial'*] *t*;*v* [*cur*]

  z predchádzajúceho (**)

  [*partial*] *v* [*cur*]

Global snapshots 15

- *Prípad 3:*

  t obsahuje len zaznamenané premenné.
  Z definícií

  x.partial = x.rec if x.done ~ x.cur if $\neg x$.done

  x.partial' = x.rec if x.done ~ x.cur' if $\neg x$.done

  teda *partial = partial'*

  [*init*] *u* [*partial*]

  ďalej z [*partial'*] *v* [*cur'*] máme

  [*partial*] *v*;*t* [*cur*]

Global snapshots 16

Jednoduché programy na zaznamenanie stavu

Asynchrónna shared-memory:

- v nejakom okamihu sa procesy dočasne zastavia
- zastavený proces ostane zastavený, kým sa nezaznamena globálny stav
- keď sú všetky zastavené, ich stavy sú zaznamenané
- po zaznamenaní sa opäť spustia

takto modifikovaný program triviálne spĺňa *R*

Global snapshots 17

Distribuovaná architektúra:

- využijeme proces *central*
- *central* pošle všetkým procesom požiadavku zastaviť výpočet
- každý proces po obdržaní tejto správy pošle potvrdenie *central*u a zastaví sa
- keď *central* dostane potvrdenie od každého procesu, všetkým pošle príkaz na zaznamenanie stavu
- každý proces zaznamená stav a pošle ho *central*u
- keď *central* dostane od každého jeho stav, pošle všetkým pokyn na pokračovanie
- keď procesy tento pokyn na pokračovanie dostanú, pošlú *central*u potvrdenie a pokračujú
- keď *central* dostane všetky potvrdenia o pokračovaní, je pripravený na ďalší záznam
- každý proces využije 6 správ, triviálne to spĺňa *R*

Global snapshots 18

zatiaľ sme ignorovali, čo s obsahom kanálov (proces nemôže čítať priamo cez kanál)

- stav kanálu vypočítame z toho, čo bolo poslané *mínus* to, čo bolo prijaté
- pre kanál *c* platí:
  - *c*.sent = *c*.received; *c*.state

  t.j.
  - *c*.state = *c*.sent – *c*.received
- *c*.sent je lokálna tomu, čo posiela
- *c*.received je lokálna tomu, čo prijíma
- definujeme

  c.state.rec = *c*.sent.rec – *c*.received.rec
- takýto mechanizmus je dosť neefektívny, lebo *c*.received, *c*.sent môžu byť veľmi dlhé, no my potrebujeme len ich rozdiel

- Modifikácia:
  - keď proces zastaví činnosť, prv než zaznamená svoj stav, pošle na každý výstupný kanál *marker* (značku)

Global snapshots 19

Efektívne programy na zaznamenanie stavu

Asynchrónna shared-memory:

- predpokladajme, že premenná y v príkaze t bola zaznamenaná t.j. platí y.done a že iná premenná x v t nebola zaznamenaná, t.j. $\neg x$.done
- pravidlo R hovorí, že t nemôže byť vykonané skôr, než sa x nezaznamená
- zaznamenanie x možno dorobiť zároveň s t:

  $\langle$ ||x: t obsahuje $x \wedge \neg x$.done::

  x.rec, x.done = x, true if $\langle$ $\exists y$: t obsahuje y:: y.done $\rangle\rangle$ || t

Global snapshots 20

- na začiatku predpokladajme, že zaznamenávanie je iniciované zaznamenávaním jednej špecifickej premennej *first*

  first.rec, *first*.done := *first*, true if *begun* $\wedge \neg$*first*.done
- je isté, že v konečnom čase po zaznamenaní *first* bude zaznamenaná každá premenná, ktorá sa vyskytuje v nejakom príkaze *t* spolu s *first*
- definujme

  x je_spolu s $y \equiv \langle \exists$ príkaz t:: t obsahuje $x \wedge t$ obsahuje $y \rangle$

  je_spolu* $\equiv$ tranzitívny uzáver je spolu
- platí

  x.done $\wedge$ x je_spolu s $y \rightarrow y$.done

  x.done $\wedge$ x je_spolu* s $y \rightarrow y$.done

Global snapshots 21

– ak pre nejakú premennú *y* neplatí

first je_spolu* s *y*

tak premenné rozdelíme do skupín a zaznamenávanie aplikujeme zvlášť pre každú skupinu

Program P2

initially ⟨ ||*x*:: *x*.done = false ⟩

transform ∀*t*

⟨ ||*x*: *t* obsahuje *x* ∧ ¬*x*.done::

x.rec, *x*.done = *x*, true if ⟨ ∃*y*: *t* obsahuje *y*:: *y*.done ⟩⟩

|| *t*

add

first.rec, *first*.done = *first*, true if *begun* ∧ ¬*first*.done ⟩

end{P2}

Global snapshots 22

Distribuovaná architektúra:

1 Nech iniciátor je proces, ktorý iniciuje zaznamenávanie tak, že zaznamená svoj vlastný stav a pošle markre na všetky vychádzajúce kanály

2 Proces, ktorý ešte nezaznamenal svoj stav, po prijatí markra zaznamená svoj stav a pošle marker na všetky vychádzajúce kanály, ktoré mu patria

3 Stav kanálaje zaznamenaný procesom, ktorý z neho prijíma správy – je to postupnosť správ prijatá po tom, čo jeho vlastný stav je zaznamenaný a prv, než sa príjme marker

Detekovanie stabilných vlastností 1

Detekovanie stabilných vlastností:

- je to problém, keď top musíme robiť počas behu programu
- rozdelíme úlohu na dve časti:
  1. zaznamenáme globálny stav
  2. zistíme, či zaznamenaný stav má požadovanú vlastnosť

Detekovanie stabilných vlastností 2

- claim ..... boolovská premenná
- W ..... stabilná vlastnosť

claim detects W ak:

invariant claim => W

$W \rightarrow$ claim

Detekovanie stabilných vlastností 3

- rec .....zaznamenaný stav
- W(s) hodnota W v stave s

Definujme

$$\text{claim} \equiv W(\text{rec})$$

(predpokladajme, že počiatočná hodnota rec je taká, že $\neg$ W(rec))

Detekovanie stabilných vlastností 4

Riešenie:

rec:= globálny stav výpočtu if $\neg$ W(rec)

t.j. z času na čas sa zaznamenáva rec až kým neplatí W(rec)

Detekovanie stabilných vlastností 5

Dôkaz správnosti stratégie, t.j. toho, že platí:

W(rec) detects W (W ....W(okamžitý stav))

Dôkaz invariantu (invariant W(rec) => W)

každý stav st po zaznamenaní je dosiahnuteľný z rec i.e. existuje v

[rec] v [st]

Detekovanie stabilných vlastností 6

Keďže W je stable tak pre každé dva stavy s1,s2 také, že s2 je dosiahnuteľné z s1 platí:

$$W(s1) \Rightarrow W(s2)$$

a odtiaľ

$$W(rec) \Rightarrow W(s)$$

pre všetky stavy s, ktoré sa vyskytujú po ukončení zaznamenávania

Detekovanie stabilných vlastností 7

Dôkaz progress podmienky ($W \rightarrow W(rec)$)

ak zaznamenávanie je iniciované v stave keď W platí, tak W bude platiť aj v stave rec (keďže je W stabilné)

Platí W ensures W(rec)

keďže

{$W \wedge \neg W(rec)$ }

rec:= globálny stav výpočtu if $\neg$ W(rec)

{W(rec) }

Detekovanie stabilných vlastností 8

Detekcia terminácie

daná množina procesov V, každý proces môže byť v dvoch stavoch:

- idle (dosiahol pevný bod)
- active ($\neg$ idle)

ak je process v idle tak jeho stav môže zmeniť iný proces u, ktorý s ním zdieľa premennú, ktorú u môže meniť (tento vzťah označíme grafom (V,E), kde (u,v) je hrana) t.j.:
v.idle := v.idle $\wedge$ u.idle

aktívny proces sa môže kedykoľvek stať idle

Detekovanie stabilných vlastností 9

Program R0
assign
    < ▯ u,v :(u,v)∈ E:: v.idle := v.idle ∧ u.idle >
▯   < ▯ u : u ∈ V:: u.idle := true>
end

terminácia nastane, keď všetky procesy sú idle, t.j.
W ≡ < ∧ u : u ∈ V:: u.idle >

claim detects W

Detekovanie stabilných vlastností 10

Program R1
initially claim = false
add
    claim := < $\wedge$ u : u $\in$ V:: u.idle >

tento program síce detekuje termináciu ale je vhodný len pre sekvenčné architektúry

Detekovanie stabilných vlastností 11

Asynchrónna shared-memory architektúra

Stratégia:
invariant d = {u | u.idle}
claim detects (d=V)

Program R2
initially claim = false □ d = {u | u.idle}
assign
    < □ u,v :(u,v)∈ E:: v.idle := v.idle ∧ u.idle
        || d:= d - {v} if ¬u.idle >
□   < □ u : u ∈ V:: u.idle := true || d:= d ∪ {u} >
□   claim := (d=V)
end

Detekovanie stabilných vlastností 12

nevýhoda R2 je, že d mení každý príkaz

Vylepšenie:
b – množina procesov
u.delta –množina procesov, ktoré u aktivoval od poslednej zmeny b (u.delta je lokálna ku u)

Detekovanie stabilných vlastností 13

Program R3
initially claim = false ▯ b=∅ ▯ < ▯ u : u.delta= ∅ >
assign
    < ▯ u,v :(u,v)∈ E:: v.idle := v.idle ∧ u.idle
        || u.delta:= u.delta ∪ {v} if ¬u.idle >
▯ < ▯ u : u ∈ V:: u.idle := true >
▯ < ▯ u : b,u.delta := b ∪ {u} –u.delta, ∅ if u.idle >
▯ claim := (b=V)
end

Byzantská dohoda 1

Zadanie:

- dva druhy procesov: spoľahlivé a nespoľahlivé
- špeciálny proces generál: jeden z nich; môže byť spoľahlivý alebo nespoľahlivý
- procesy navzájom komunikujú
- každý má lokálnu premennú, sú uložené v poli *byz*: proces *x* má premennú *byz*[*x*]

Úloha: navrhnúť program, ktorý keď vykonávajú spoľahlivé procesy, tak všetky si nastavia rovnakú hodnotu premennej *byz*. Naviac, ak je generál spoľahlivý, tak touto hodnotou je počiatočná hodnota generála $d^0[g]$

Byzantská dohoda 2

- Predpokladáme, že je

  t nespoľahlivých

  $> 2.t$ spoľahlivých

  (inak algoritmus neexistuje: napr. 1 nespoľahlivý a 2 spoľahliví: toto je aj základ pre dôkaz)
- Označenie premenných:

  u, v, w – spoľahlivý proces

  x, y, z – ľubovoľný proces

  g – proces generál
- premenné spoľahlivých procesov budeme označovať *spoľahlivé*, podobne pre nespoľahlivé

Byzantská dohoda 3

Spec1:

$byz[u] = byz[v]$

a ak g je spoľahlivý, tak

$byz[u] = d^0[g]$

Ak g je spoľahlivý, tak druhá podmienka implikuje prvú.

Obmedzíme sa na prípad, keď $d^0[g]$ je boolovská.
V prípade, že $d^0[g]$ má 2^m možných hodnôt, zakódujeme ich do m bitov a spustíme paralelne na (teraz už boolovské) zložky binárneho kódu.

Byzantská dohoda 4

Premenné:

con – postupnosť matíc (presvedčenia)

$con^r[x, y]$ – r-tá matica a jej prvok $[x, y]$

$con^r[x, y]$ – je boolovská a lokálna pre x

$d^r[x]$ – je boolovská a lokálna pre x

(hodnota x v r-tom kole dohadovania)

$con^r[u, *] = \langle + x: con^r[u, x] :: 1 \rangle$

Byzantská dohoda 5

Spec2:

(B1) $\langle \wedge u\colon u \neq g :: \neg d^0[u] \rangle \wedge \langle \wedge u, x :: \neg con^0[u, x] \rangle$

(A1) $con^r[u, v] = d^{r-1}[v]$

(A2) $con^{r-1}[u, x] \Rightarrow con^r[v, x]$

(E1) $d^r[u] = d^{r-1}[u] \vee (con^r[u, *] \geq r \wedge con^r[u, g])$

(E2) $byz[u] = d^{t+1}[u]$

Správnosť Spec2 (ukážeme, že Spec2 $\Rightarrow$ Spec1)

Byzantská dohoda 6

- Veta: Ak g je spoľahlivý, tak platí

$$\langle\ \forall r\colon r \geq 1 :: d^r[u] = d^0[g]\ \rangle$$

Dôkaz: indukciou cez r

$r = 1$:

z (E1): $d^1[u] = d^0[u] \vee (con^1[u, *] \geq 1 \wedge con^1[u, g])$,
ale $con^1[u, g] \Rightarrow con^1[u, *] \geq 1$
a z (A1) $con^1[u, g] = d^0[g]$, takže

$$d^1[u] = d^0[u] \vee d^0[g].$$

Ak $u = g$, tak $d^1[g] = d^0[g] \vee d^0[g]$,
ak $u \neq g$, tak $d^1[u] = \text{false} \vee d^0[g] = d^0[g]$

$r > 1$:

$d^r[u] = d^{r-1}[u] \vee (con^r[u, *] \geq r \wedge con^r[u, g])$
z hypotézy vieme, že $d^{r-1}[u] = d^0[g]$
z (A1) $con^r[u, g] = d^{r-1}[g]$ $(= d^0[g])$,
teda $d^r[u] = d^0[g] \vee (con^r[u, *] \geq r \wedge d^0[g])$ z čoho
$d^r[u] = d^0[g]$

Byzantská dohoda 7

Veta: $\langle\, \forall u, v :: d^{t+1}[u] = d^{t+1}[v] \,\rangle$

Dôkaz: Ak g je spoľahlivý, tak platnosť vyplýva z predošlej vety. Nech teda g je nespoľahlivý.

Nech r je najmenšie také, že $d^r[u]$ platí pre nejaké u. Ak také r neexistuje, veta platí. Ukážeme, že platí $r \leq t$ a $d^{r+1}[v]$ pre $\forall v$.

$\neg d^{r-1}[u] \wedge d^r[u]$	/* výber r a u */
$con^r[u, *] \geq r \wedge con^r[u, g]$	/* z (E1) */
$con^r[u, x] \Rightarrow con^{r+1}[v, x]$	/* z (A2) */
$\neg con^r[u, u]$	/* z (A1), $\neg d^{r-1}[u]$ */
$con^{r+1}[v, u]$	/* z (A1), $d^r[u]$ */
$con^{r+1}[v, *] > con^{r+1}[u, *]$	/* z predošlých troch */
$con^{r+1}[v, *] \geq r + 1$	/* z (a) */
$con^{r+1}[v, g]$	/* z 2.riadku a (A2) */
$d^{r+1}[v]$	/* z predošlých dvoch */

Byzantská dohoda 8

Teraz ukážeme, že $r \leq t$, čím dostaneme $d^{r+1}[u] \Rightarrow d^{t+1}[v]$ z (E1).

Vyberali sme r tak, že bolo najmenšie, teda

$\neg d^{r-1}[w]$

$\neg con^{r}[u, w]$ /* z (A1) */

t.j. con pre spoľahlivé neplatí (v r-tom kole), *môže* to platiť teda len pre nespoľahlivé (nie nutne pre všetky), ktorých je t. Čiže

$con^{r}[u, *] \leq t$

$r \leq con^{r}[u, *] \leq t$

Byzantská dohoda 9

Vlastnosti (A1) a (A2) sa nedajú zabezpečiť pri neautorizovanom komunikovaní, preto ich musíme zjemniť.

Zavedieme nové premenné:

$sum^r[x, y]$ – of integer

$obs^r[x, y]$ – of boolean

$val^r[x, y]$ – of boolean

Spec3: (B1), (E1), (E2) a nasledujúce:

(B2) $\neg obs^0[u, x]$

(A3) $0 \leq sum^r[u, x] - \langle\ +w\colon obs^r[w, x]::\ 1\ \rangle \leq t$

(E3) $obs^{r+1}[u, x] = (obs^r[u, x] \vee sum^r[u, x] > t \vee val^r[u, x])$

(E4) $val^r[u, v] = d^r[v]$

(E5) $con^r[u, x] = sum^r[u, x] > 2.t$

Byzantská dohoda 10

Vysvetlenie:

(A3) $sum^r[u, x]$ – odhad u-čka, pre koľko w platí $obs^r[w, x]$

(E4) $val^r[u, x]$ – odhad u hodnoty $d^r[x]$
(ak x je spoľahlivý, tak je to presne $d^r[x]$)

(E3) $obs^{r+1}[u, x]$ platí, ak
$obs^r[v, x]$ platí pre nejaké spoľahlivé v
$(obs^r[u, x] \vee sum^r[u, x] > t)$
alebo u odhaduje, že $d^r[x]$ platí

(E5) $con^r[u, x]$ platí, ak $obs^r[w, x]$ platí pre viac než t spoľahlivých procesov w

Byzantská dohoda 11

Správnosť Spec3 (ukážeme, že Spec3 $\Rightarrow$ Spec2)

Z (A3) vieme, že

(D1) $\langle\, \exists w::\ obs^r[w, x] \,\rangle \vee sum^r[u, x] \leq t$

(D2) $\langle\, \forall w::\ obs^r[w, x] \,\rangle \Rightarrow sum^r[u, x] > 2.t$

(D3) $sum^r[u, x] > 2.t \Rightarrow sum^r[v, x] > t$

Dôkaz D3:

$$sum^r[u, x] > 2.t \Rightarrow \langle\, +w:\ obs^r[w, x]::\ 1 \,\rangle > t$$
$$sum^r[v, x] \geq \langle\, +w:\ obs^r[w, x]::\ 1 \,\rangle > t$$

Byzantská dohoda 12

Lema 1: $\langle\ \forall r\colon r \geq 0 :: obs^{r+1}[u, v] = d^r[v]\ \rangle$

Dôkaz: indukciou cez r

$r = 0$

z (E3): $obs^1[u, v] = (obs^0[u, v] \vee sum^0[u, v] > t \vee val^0[u, v])$

z (B2) $(\forall w:: \neg obs^0[w, v])$ a z (D1) máme:

$obs^1[u, v] = val^0[u, v]$

a z (E4)

$obs^1[u, v] = d^0[v]$

$r > 1$:

$obs^{r+1}[u, v] = (obs^r[u, v] \vee sum^r[u, v] > t \vee val^r[u, v])$

$sum^r[u, v] > t \Rightarrow \langle\ \exists w:: obs^r[w, v]\ \rangle$ /* z (D1) */

$obs^r[u, x] \vee sum^r[u, x] > t \Rightarrow \langle\ \exists w:: obs^r[w, v]\ \rangle$

$\langle\ \exists w:: obs^r[w, v]\ \rangle \Rightarrow d^{r-1}[v]$ /* indukcia*/

$d^{r-1}[v] \Rightarrow d^r[v]$ /* z (E1) */

$val^r[u, v] = d^r[v]$ /* (E4) */

$obs^{r+1}[u, v] = d^r[v]$ /* z ↑ */

Byzantská dohoda 13

Lema 2: $\langle\ \forall r\colon r \geq 0 :: con^r[u, v] = obs^r[u, v]\ \rangle$
Dôkaz: indukciou cez r

$r = 0$:

$sum^0[u, v] \leq t$	/* z (B2) */
$\neg con^0[u, v]$	/* z predošlého a (E5)*/

$r > 1$:

$obs^r[u, v] = d^{r-1}[v]$	/* lema 1 */
$\langle\ \forall w, w' :: obs^r[w, v] = obs^r[w', v]\ \rangle$	/* z $\uparrow$*/
$obs^r[u, v] = sum^r[u, v] > 2.t$	/* z $\uparrow$ a (D1), (D2) */
$obs^r[u, v] = con^r[u, v]$	/* z (E5) */

Byzantská dohoda 14

Veta: $\langle\ \forall r\colon r \geq 1 :: con^r[u, v] = d^{r-1}[v]\ \rangle$
Dôkaz: z liem 1 a 2

Veta: $\langle\ \forall r\colon r \geq 0 :: con^r[u, x] \Rightarrow con^{r+1}[v, x]\ \rangle$
Dôkaz:

nech $con^r[u, x]$, potom

$sum^r[u, v] > 2.t$	/* z (E5) */
$\langle\ \forall w :: sum^r[w, x] > t\ \rangle$	/* z (D3) */
$\langle\ \forall w :: obs^{r+1}[w, x]\ \rangle$	/* z (E3) */
$sum^{r+1}[v, x] > 2.t$	/* z (D2) */
$con^{r+1}[v, x]$	/* z (E5) */

Byzantská dohoda 15

Vlastnosti (B1) a (B2) sa už ľahko implementujú ako rovnice.

(E1) – (E5) už sú priamo rovnice, teraz ostáva prepísať (A3) do rovníc.

Premenné:

$robs^r[u, z, x]$ – lokálna k u, ktorá číta hodnotu $obs^r[z, x]$

$sum^r[u, x]$ – počet z takých, že je $robs^r[u, z, x]$ true

Spec4: (B1), (B2), (E1) – (E5) a nasledujúce:

(E6) $robs^r[u, z, x] = obs^r[z, x]$

(E7) $sum^r[u, x] = \langle +z: robs^r[u, z, x] :: 1 \rangle$

Byzantská dohoda 16

Vysvetlenie:

- proces u číta počet procesov z, pre ktoré platí $obs^r[z, x]$; výsledok si uloží do $sum^r[u, x]$
- započítajú sa všetky spoľahlivé w, pre ktoré platí $obs^r[w, x]$, a teda platí dolná hranica
- keďže máme t nespoľahlivých, hodnota $sum^r[u, x]$ nemôže prekročiť $\langle +w\colon obs^r[w, x]\colon\colon 1 \rangle$ o viac než t

Tým je dokázaná správnosť Spec4 (lebo Spec4 $\Rightarrow$ Spec3).

Byzantská dohoda 17

- Program Byzantská dohoda

always

$\langle \Box\, y\colon y \neq g :: d^0[y] = \text{false} \rangle$ (B1)

$\Box\langle \Box\, y, x :: obs^0[y, x] = \text{false} \rangle$ (B2)

$\Box\langle \Box\, r, y\colon 1 \leq r \leq t + 1 ::$ (E1)

$d^r[y] = d^{r-1}[y] \vee (con^r[y, *] \geq r \wedge con^r[y, g]) \rangle$

{ „$con^r[y, *]$" je skratka za „$\langle + z\colon con^r[y, z] :: 1 \rangle$" }

$\Box\langle \Box\, y :: byz[y] = d^{t+1}[y] \rangle$ (E2)

$\Box\langle \Box\, r, y, x\colon 0 \leq r \leq t + 1 ::$

$obs^{r+1}[y, x] = (obs^r[y, x] \vee sum^r[y, x] > t$

$\vee\ val^r[y, x])$ (E3)

$\Box\ val^r[y, x] = d^r[x]$ (E4)

$\Box\ con^r[y, x] = sum^r[y, x] > 2.t \rangle$ (E5)

$\Box\langle \Box\, r, y, z, x\colon 0 \leq r \leq t + 1 :: robs^r[y, z, x] = obs^r[z, x] \rangle$ (E6)

$\Box\langle \Box\, r, y, z, x\colon 0 \leq r \leq t + 1 ::$

$sum^r[y, x] = \langle +z\colon robs^r[y, z, x] :: 1 \rangle \rangle$ (E7)

end

Byzantská dohoda 18

Rovnice možno usporiadať v správnom poradí (splnenie požiadavky pre always-sekciu):

(B1), (B2), (E6), (E7), (E4), (E3), (E5), (E1), (E2)

Temporálne logiky

propozičná logika ≁ logika prvého rádu
globálna ≁ kompozičná
vetviaci sa čas ≁ lineárny čas
časové body ≁ časové intervaly
diskrétny čas ≁ spojitý čas
minulosť ≁ budúcnosť

Temporálne logiky 1

- časová os:
  - dvojica $(S, \prec)$, kde $\prec$ je úplné usporiadanie
  - izomorfná s $(\square, <)$
- čas:
  - diskrétny
  - počiatočný okamih
  - nekonečný
- *AP*: atomické propozície (ozn. *P*, *Q*, …)
- štruktúra lineárneho času: trojica $M = (S, x, L)$, kde

  S – množina stavov

  x: $\mathrm{N} \to S$ – postupnosť stavov

  L: $S \to \boldsymbol{P}(AP)$ – určuje pre daný stav, ktoré atomické propozície v tomto stave platia (teda ktoré *AP* sú true)

Temporálne logiky 2

- označenie:
  - postupnosť stavov $x = s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots$
  - definujeme $x^i = s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, s_{i+3}, \ldots$ (teda $x = x^0$)
- základné temporálne operátory:

  $\Diamond p$ – eventually p (raz určite p)(textovo Fp)

  $\Box p$ – vždy p (textovo Gp)

  $\bigcirc p$ – nasledujúci krát p (textovo Xp)

  $p \cup q$ – p until q (q začne platiť, keď p prestane)

Temporálne logiky 3

- Syntax: množina PLTL formúl je definovaná ako najmenšia množina generovaná nasledujúcimi pravidlami:
  - každá *AP* (atomická propozícia) *P* je formula
  - ak *p*, *q* sú formuly, tak $p \wedge q$, $\neg p$ sú formuly
  - ak *p*, *q* sú formuly, tak *p* U *q*, X*p* sú formuly

potom možno zaviesť označenia

Fp = true U p	$\Diamond p$
Gp = $\neg$F$\neg p$	$\Box p$
F$^{\infty}p$ = GFp	(nekonečne veľa krát)
G$^{\infty}p$ = FGp	(skoro všade)

Temporálne logiky 4

- Sémantika:
  - $x \models P$ iff $P \in L(s_0)$ pre atomickú propozíciu P
  - $x \models p \wedge q$ iff platí $x \models p$ and $x \models q$
  - $x \models \neg p$ iff neplatí $x \models p$
  - $x \models (p \mathrm{U} q)$ iff $\exists j\ (x^j \models q$ and $\forall k < j: x^k \models p)$
  - $x \models \mathrm{X}p$ iff $x^1 \models p$
  - $x \models \mathrm{F}p$ iff $\exists j\ (x^j \models p)$
  - $x \models \mathrm{G}p$ iff $\forall j\ (x^j \models p)$
  - $x \models \mathrm{F}^\infty p$ iff $\forall k\ \exists j \geq k\ (x^j \models p)$
  - $x \models \mathrm{G}^\infty p$ iff $\exists k\ \forall j > k\ (x^j \models p)$
- Príklady:

  $\mathrm{G}(p \Rightarrow \mathrm{F}q)$: vždy keď platí p, tak raz začne platiť aj q

  $\mathrm{p} \wedge \mathrm{G}(p \Rightarrow \mathrm{X}q) \Rightarrow \mathrm{G}p$: temporálna formulácia indukcie

  $p \Rightarrow \mathrm{F}q$: ak p platí teraz, tak raz bude platiť q

Temporálne logiky 5

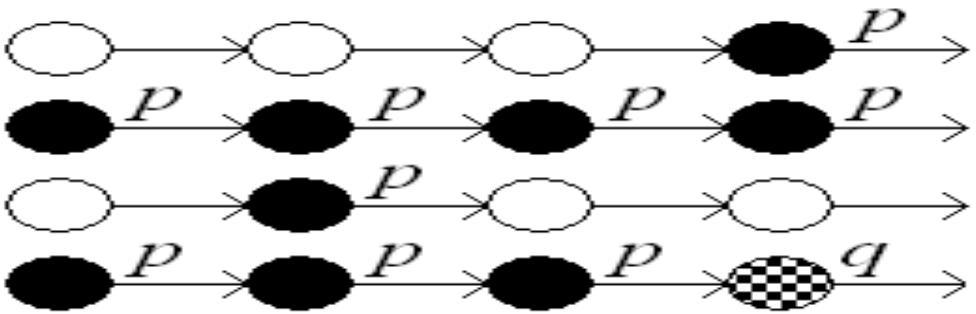
Príklady použitia operátorov F, G, X a U v propozičnej lineárnej temporal logic (značky sú pri vrcholoch)

F*p*

G*p*

X*p*

p U *q*



Temporálne logiky 6

- temporálna štruktúra: trojica $M = (S, R, L)$, kde
  S – množina stavov
  $R \subseteq S \times S$ taká, že $\forall s \in S\ \exists t \in S\ (s, t) \in R$
  L: $S \to \boldsymbol{P}(AP)$ – určuje pre daný stav, ktoré atomické propozície v tomto stave platia (teda ktoré AP sú true)
- M možno chápať ako značkovaný orientovaný graf s vrcholmi S, hranami danými R a vrcholy majú značky dané L
- Hovoríme, že M je
  - *acyklický*, ak nemá orientované cykly
  - *stromová štruktúra*, ak každý vrchol má nanajvýš jedného predchodcu
  - *strom*, ak je stromová štruktúra a má koreň
- označenie:
  - plná cesta $x = (s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots)$: pre $\forall i$: $(s_i, s_{i+1}) \in R$
  - definujeme $x^i = (s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, s_{i+3}, \ldots)$

Temporálne logiky 7

- CTL (Computational Tree Logic)
- CTL* (Full Branching Time Logic) – silnejšia ako CTL, historicky mladšia; najprv popíšeme CTL*

- Syntax: (*stavové* a *path* („cestové") formuly)
  - každá atomická propozícia je stavová formula (S1)
  - ak p, q sú stavové formuly, tak $p \wedge q$, $\neg p$ sú stavové formuly (S2)
  - ak p je path formula, tak Ep, Ap sú stavové formuly (S3)
  - každá stavová formula je aj path formula (P1)
  - ak p, q sú path formuly, tak potom aj $p \wedge q$, $\neg p$ sú path formuly (P2)
  - ak p, q sú path formuly, tak potom aj p U q, Xp sú path formu (P3)

Temporálne logiky 8

- CTL* tvoria stavové formuly
- CTL tvoria pravidlá (S1), (S2), (S3) a pravidlo (P0):
  - ak *p*, *q* sú stavové formuly, tak *p* U *q*, X*p* sú stavové formuly (P0)
- CTL operátory

  A – pre všetky budúcnosti

  E – existuje budúcnosť

  za A alebo E vždy nasleduje jeden z operátorov G, F, X, U
- dá sa ukázať, že CTL* má väčšiu vyjadrovaciu silu než CTL

Temporálne logiky 9

- Sémantika: (pre CTL*)

  (S1) $M, s_0 \models p$ iff $p \in L(s_0)$

  (S2) $M, s_0 \models p \wedge q$ iff platí $M, s_0 \models p$ and $M, s_0 \models q$

  $M, s_0 \models \neg p$ iff neplatí $M, s_0 \models p$

  (S3) $M, s_0 \models \mathrm{E}p$ iff $\exists x$ v M tak, že $M, x \models p$

  $M, s_0 \models \mathrm{A}p$ iff pre $\forall x$ v M platí $M, x \models p$

  (P1) $M, x \models p$ iff $M, s_0 \models p$

  (P2) $M, x \models p \wedge q$ iff platí $M, x \models p$ and $M, x \models q$

  $M, x \models \neg p$ iff neplatí $M, x \models p$

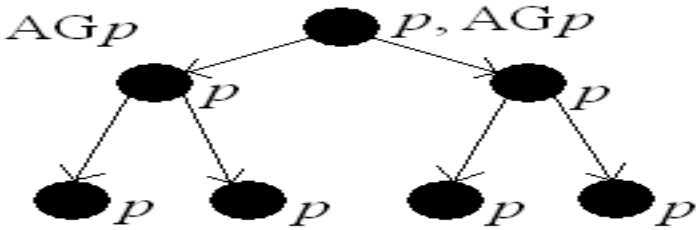
  (P3) $M, x \models (p \mathrm{U} q)$ iff

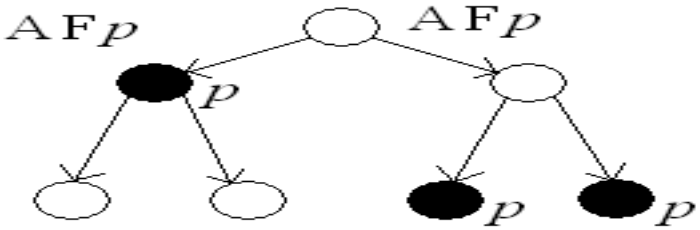
  $\exists j$ ($M, x^j \models q$ a $\forall k$ ($k < j$ implikuje $M, x^k \models p$)

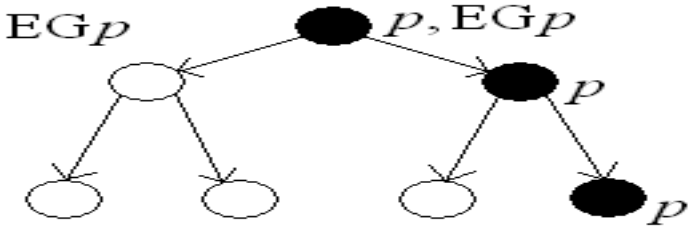
  $M, x \models \mathrm{X}p$ iff $M, x^1 \models p$

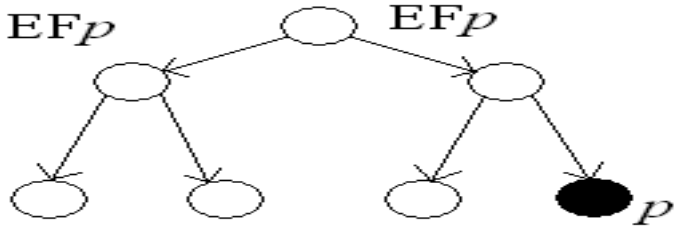
Temporálne logiky 10

Príklady použitia operátorov A, E v propozičnej branching temporal logic (značky sú pri vrcholoch; vrchol je vyplnený, ak má značku *p*)









Temporálne logiky 11

- množina schém axióm
- množina odvodzovacích (inferenčných) pravidiel

formula *p* je *dokázateľná* (zapisujeme |-*p*), ak pre ňu existuje *dôkaz*, t.j. konečná postupnosť formúl taká, že na jej konci je *p* a každá formula v nej je buď prípad axiómy alebo vyplýva z predchádzajúcich použitím nejakého odvodzovacieho pravidla

Temporálne logiky 12

- Schémy axióm:

tautológie propozičnej logiky	(Ax1)
$\mathrm{EF}p \equiv \mathrm{E}(\mathrm{true}\ \mathrm{U}\ p)$	(Ax2)
$\mathrm{AG}p \equiv \neg\mathrm{EF}\neg p$	(Ax2’)
$\mathrm{AF}p \equiv \mathrm{A}(\mathrm{true}\ \mathrm{U}\ p)$	(Ax3)
$\mathrm{EG}p \equiv \neg\mathrm{AF}\neg p$	(Ax3’)
$\mathrm{EX}(p \vee q) \equiv \mathrm{EX}p \vee \mathrm{EX}q$	(Ax4)
$\mathrm{AX}p \equiv \neg\mathrm{EX}\neg p$	(Ax5)
$\mathrm{E}(p\ \mathrm{U}\ q) \equiv q \vee (p \wedge \mathrm{EXE}(p\ \mathrm{U}\ q))$	(Ax6)
$\mathrm{A}(p \vee q) \equiv q \vee (p \wedge \mathrm{AXA}(p\ \mathrm{U}\ q))$	(Ax7)
$\mathrm{EX}\ \mathrm{true} \wedge \mathrm{AX}\ \mathrm{true}$	(Ax8)
$\mathrm{AG}(r \Rightarrow (\neg q \wedge \mathrm{EX}r)) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg\mathrm{A}(p\ \mathrm{U}\ q))$	(Ax9)
$\mathrm{AG}(r \Rightarrow (\neg q \wedge \mathrm{EX}r)) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg\mathrm{AF}q)$	(Ax9’)
$\mathrm{AG}(r \Rightarrow (\neg q \wedge (p \Rightarrow \mathrm{AX}r))) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg\mathrm{E}(p\ \mathrm{U}\ q))$	(Ax10)
$\mathrm{AG}(r \Rightarrow (\neg q \wedge \mathrm{AX}r)) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg\mathrm{EF}q)$	(Ax10’)
$\mathrm{AG}(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\mathrm{EX}p \Rightarrow \mathrm{EX}q)$	(Ax11)

Temporálne logiky 13

- Odvodzovacie pravidlá:

  ak |-p, tak potom |-AGp (R1, zovšeobecnenie)

  ak |-p a |-$p \Rightarrow q$, tak potom |-q (R2, modus ponens)

- Veta: Deduktívny systém s axiómami (Ax1)–(Ax11) a odvodzovacími pravidlami (R1), (R2) je sound (zdravý, korektný) and complete (úplný) pre CTL.

Temporálne logiky 14

  - daná štruktúra M a formula p
- Úloha: zistiť, či M je modelom pre p

Branching–Time–Logic–Model–Checking

  - daná konečná štruktúra $M = (S, R, L)$ a BTL formula p

- Úloha: pre každý stav $s \in S$ určiť, či platí $M, s \models p$ a ak áno, s sa označí značkou "p"

Temporálne logiky 15

Linear–Time–Logic–Model–Checking

- daná konečná štruktúra $M = (S, R, L)$ a LTL formula p

- Úloha: pre každý stav $s \in S$ určiť, či existuje plná cesta, spĺňajúca p, začínajúca sa v s, a ak áno, s sa označí "Ep"

- Príklad: CTL model checking
  - predpokladajme, že už máme vrcholy, pre ktoré platí "p označené"
  - ideme označovať tie, pre ktoré platí AFp:

  1. ak je vrchol označený p, tak ho označíme aj AFp
  2. (opakuje sa, kým sa dá)
     označ vrchol s AFp, ak všetci jeho následníci sú označení AFp
  3. označ $\neg$AFp tie, ktoré nie sú označené AFp